06 Teorema del Binomio Aplicaciones

Claudio Carrasco, Rodrigo Contreras y Geir Da Silva

by

Profesores Mates 1

Otoño, 2024

¿Qué es un binomio?

¿Qué es un Binomio?

El término **binomio** proviene del latín *binomius*, que significa “dos nombres” y refleja el hecho de que esta expresión contiene dos términos.

Los términos pueden ser números, variables, o el producto de números y variables, y están separados por un signo de suma ($+$) o resta (-).

Forma General de un Binomio

Un binomio generalmente se presenta en la forma:

$$a \cdot x^n \pm b \cdot y^m$$

donde:

- a y b son coeficientes (números reales o complejos).
- x y y son variables.
- n y m son exponentes enteros no negativos.

Ejemplos de Binomios

Ejemplos

- $3x + 4y$
- $x^2 - 9$
- $5t^3 + 2\sqrt{2}$

¿Qué es un Binomio Cuadrado?

Un *binomio cuadrado* se refiere a la expresión resultante de elevar al cuadrado un binomio. La fórmula general es:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Esta expresión es una aplicación directa de la identidad algebraica que se aplica al elevar un binomio al cuadrado.

Ejemplo de Binomio Cuadrado

Consideremos el binomio $(x + 3)$. Para calcular el cuadrado de este binomio, aplicamos la fórmula:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Este resultado muestra cómo se expande un binomio cuadrado utilizando la fórmula del binomio cuadrado.

Ejercicios

1. $(x+2)^2$
2. $(y-3)^2$
3. $(2z+4)^2$
4. $(3a-5)^2$
5. $(b+1/2)^2$
6. $(5-x)^2$
7. $(3p+2q)^2$
8. $(2s-3t)^2$
9. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$
10. $(1-\pi)^2$

Soluciones

1. $x^2 + 4x + 4$
2. $y^2 - 6y + 9$
3. $4z^2 + 16z + 16$
4. $9a^2 - 30a + 25$
5. $b^2 + b + 1/4$
6. $25 - 10x + x^2$
7. $9p^2 + 12pq + 4q^2$
8. $4s^2 - 12st + 9t^2$
9. $5 + 2\sqrt{6}$
10. $1 - 2\pi + \pi^2$

Introducción

- El **Teorema del Binomio**, formulado por Newton, proporciona una forma de expandir expresiones de la forma $(a + b)^n$.
- El **Triángulo de Pascal** es una disposición geométrica de coeficientes binomiales ordenados en forma de triángulo.

Teorema del Binomio

- Según el Teorema del Binomio, la expansión de $(a+b)^n$ es:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Donde $\binom{n}{k}$ son los coeficientes binomiales, que representan el número de formas de elegir k elementos de un total de n.

Teorema del Binomio

Introducción

- El Teorema del Binomio es una fórmula que proporciona la expansión de la potencia n-ésima de un binomio.
- Aparece comúnmente en matemáticas, estadísticas, ingeniería, entre otras áreas.
- Fue desarrollado por Isaac Newton en el siglo XVII.

Declaración del Teorema

El Teorema del Binomio establece que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

donde:

- a y b son números cualesquiera,
- n es un número entero no negativo,
- $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial, el cual se calcula como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo de Aplicación

Consideremos la expansión de $(x+y)^5$:

$$(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} y^k$$

Desarrollando la suma, tenemos:

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 \\ &\quad + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.\end{aligned}$$

Triángulo de Pascal

- El Triángulo de Pascal se construye sumando los dos números que están directamente arriba y colocando el resultado entre ellos en la siguiente fila.
- Cada número en el Triángulo de Pascal representa un coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, donde n es el número de la fila y k es la posición en esa fila.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Relación entre el Triángulo de Pascal

- Los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ en el Teorema del Binomio son exactamente los números encontrados en el Triángulo de Pascal.
- Esta correspondencia permite utilizar el Triángulo de Pascal para expandir binomios de forma rápida y eficiente sin realizar cálculos complejos para cada coeficiente.

Ejemplo

Considere la expansión de $(x+y)^4$:

- Los coeficientes son directamente tomados de la quinta fila del Triángulo de Pascal (recordando que empezamos desde la fila 0): 1, 4, 6, 4, 1.
- Entonces, la expansión es:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Conclusión

- El Teorema del Binomio es una herramienta poderosa para la expansión de expresiones algebraicas.
- Facilita el cálculo en muchas áreas de la matemática y la ciencia aplicada.
- Entender este teorema y su aplicación puede abrir puertas a su uso en teoría de probabilidades, análisis combinatorio y más.

Relevancia del Teorema del Binomio en las Ciencias

Teorema del Binomio en Economía

- En economía, el Teorema del Binomio se utiliza para modelar crecimiento compuesto y fluctuaciones en mercados financieros.
- Ejemplo clave: Cálculo de retornos de inversiones compuestas anualmente o de manera continua.

Ejemplo: Crecimiento Compuesto

Suponga que una inversión inicial P crece a una tasa anual r, compuesta anualmente.

El primer año el Capital al final del periodo de capitalización es lo que tenía inicialmente P más lo que ganó en ese periodo $P \cdot r$

$$C_{F1} = P + P \cdot r = P(1 + r)$$

Para los años siguientes es similar

Años	1	2	$\cdots$	n
C_F	$P(1+r)$	$P(1+r)^2$	$\cdots$	$P(1+r)^n$

Capital futuro

La fórmula del Capital Futuro es:

$$C_F = P(1 + r)^n$$

Donde n es el número de años. El Teorema del Binomio puede descomponer el crecimiento anual de la inversión:

$$P(1 + r)^n = P \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k} r^k$$

Esta expansión ayuda a entender el impacto incremental de cada término compuesto en la inversión total.

TB en Probabilidades

- Consideremos el lanzamiento de una moneda equilibrada, donde la probabilidad de obtener cara $P(\text{Cara}) = \frac{1}{2}$ y la de obtener sello $P(\text{Sello}) = \frac{1}{2}$.
- Pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente k caras en n lanzamientos?

$$\overbrace{\underbrace{CC\cdots C}_{k\text{ caras}}\ \mathrm{S}\,\mathrm{S}\cdots\ \mathrm{S}}^{n\text{ intentos}}$$

Teorema del Binomio

- El Teorema del Binomio nos permite expandir y simplificar la expresión $(a+b)^n$.
- En nuestro caso, $a = P(\text{Cara}) = \frac{1}{2}$ y $b = P(\text{Sello}) = \frac{1}{2}$, y queremos expandir $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^n$.
- La fórmula específica que usamos es:

$$\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- Para calcular la probabilidad de k caras en n lanzamientos, usamos:

$$P(k \text{ caras}) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Ejemplo Práctico

Supongamos que lanzamos una moneda 5 veces y queremos saber la probabilidad de obtener exactamente 3 caras:

$$P(3\text{ caras}) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

Calculamos:

$$P(3\text{ caras}) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Este resultado nos dice que la probabilidad de obtener 3 caras en 5 lanzamientos es $\frac{5}{16}$.

TB en Biología Molecular

- Consideremos una secuencia de ADN donde cada base (adenina, timina, citosina, guanina) puede mutar con una probabilidad p.
- Si asumimos que la mutación en cada base es independiente de las demás, podemos modelar la cantidad de mutaciones en un fragmento de ADN de longitud n usando el Teorema del Binomio.

Modelo Matemático

- La fórmula del Teorema del Binomio que utilizaremos es:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Donde:
  - n es el número total de bases en el fragmento.
  - k es el número de mutaciones esperadas.
  - p es la probabilidad de mutación de cada base.

Ejemplo Práctico

Supongamos un fragmento de ADN de 100 bases donde cada base tiene una probabilidad de mutación de 0.01 por generación y, por lo tanto, la probabilidad de NO obtener una mutación es de $1 - p = 0.99$. ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 5 mutaciones?

$$P(5 \text{ mutaciones}) = \binom{100}{5}(0.01)^5(0.99)^{95}$$

Calculamos:

$$P(5 \text{ mutaciones}) \approx \frac{100!}{5!95!}(0.01)^5(0.99)^{95} \approx 0.0815$$

Este resultado nos indica que la probabilidad de obtener exactamente 5 mutaciones en este fragmento de ADN por generación es aproximadamente 8.15%.

Conclusión

- El Teorema del Binomio proporciona una herramienta valiosa para los biólogos moleculares para predecir la variabilidad genética.
- Esta capacidad de predicción es fundamental para la investigación en genética de poblaciones, la evolución y el diagnóstico de enfermedades genéticas.

TB en Epidemiología

- Modelar la transmisión de enfermedades es crucial para entender y controlar brotes epidémicos.
- Usamos el Teorema del Binomio para calcular la probabilidad de transmisión basándonos en la probabilidad individual de transmisión y el número de contactos.

TB en Epidemiología

- Consideremos una enfermedad contagiosa en una población.
- Supongamos que cada individuo infectado tiene una probabilidad p de transmitir la enfermedad a cualquier individuo susceptible durante un contacto.
- Si un individuo infectado tiene n contactos susceptibles, podemos modelar el número de nuevas infecciones usando el Teorema del Binomio.

Modelo Matemático

- La probabilidad de que un individuo infectado transmita la enfermedad a exactamente k de sus n contactos es dada por la fórmula binomial:

$$P(k \text{ nuevas infecciones}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Esto nos da la distribución de probabilidad de nuevas infecciones por un solo individuo infectado.

Ejemplo Práctico

Supongamos que un individuo infectado tiene 10 contactos, y la probabilidad de transmitir la enfermedad en cada contacto es de 0.2 (20%).

$$P(3 \text{ nuevas infecciones}) = \binom{10}{3}(0.2)^3(0.8)^7$$

Calculamos:

$$P(3 \text{ nuevas infecciones}) = 120 \times (0.008) \times (0.2097) \approx 0.201$$

Este resultado nos indica que la probabilidad de que el individuo infectado transmita la enfermedad a exactamente 3 personas es aproximadamente 20.1%.

Conclusión

- El Teorema del Binomio proporciona una herramienta poderosa para modelar la transmisión de enfermedades en situaciones donde las probabilidades de contacto y transmisión son conocidas.
- Este modelo ayuda a entender la dinámica de un brote y es fundamental para desarrollar estrategias de control eficaces.

TB en la ecología

- En ecología del comportamiento, el Teorema del Binomio es útil para modelar la probabilidad de éxito en comportamientos de forrajeo.
- Este enfoque permite predecir cómo los animales optimizan su búsqueda de recursos basándose en la probabilidad de éxito de cada intento.

TB en Forrajeo

- Consideremos un animal que busca alimento y cada intento de encontrar alimento tiene una probabilidad p de éxito.
- Si el animal hace n intentos de forrajeo, el Teorema del Binomio nos permite calcular la probabilidad de encontrar alimento exactamente k veces.

Modelo Matemático

- La probabilidad de que el animal encuentre alimento en exactamente k de los n intentos se describe con la fórmula:

$$P(k \text{ éxitos}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Esto proporciona una distribución de probabilidad para el número de éxitos en una serie de intentos independientes.

Ejemplo Práctico

Supongamos que un animal tiene una probabilidad del 30% (0.3) de encontrar alimento en cada intento de forrajeo y realiza 10 intentos:

$$P(3 \text{ éxitos}) = \binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7$$

Calculamos:

$$P(3 \text{ éxitos}) = 120 \times (0.027) \times (0.08235) \approx 0.267$$

Este resultado indica que la probabilidad de encontrar alimento exactamente tres veces en diez intentos es aproximadamente 26.7%.

Conclusión

- El Teorema del Binomio ofrece un método efectivo para analizar y predecir el comportamiento de forrajeo en animales.
- Comprender estas probabilidades ayuda a los ecologistas a evaluar estrategias de supervivencia y adaptación en diferentes ambientes.

Ejercicios Directos TB

1. Expande $(x+y)^5$.
2. Calcula el coeficiente de x^3y^2 en la expansión de $(x+y)^5$.
3. Expande $(2x-3y)^4$.
4. Determina el término independiente en la expansión de $(x-2)^6$.
5. Calcula el coeficiente de x^2y^3 en $(x+2y)^5$.
6. Expande $(3x+4y)^3$.
7. Encuentra el coeficiente de a^5b^2 en $(a+2b)^7$.
8. Expande y simplifica $(x-y)^6$.
9. Determina el coeficiente de x^4y^3 en la expansión de $(2x+y)^7$.
10. Encuentra el término constante en la expansión de $(5x-1/x)^4$.

Soluciones

1. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
2. Coeficiente de x^3y^2 es 10.
3. $16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$
4. Término independiente es 64.
5. Coeficiente de x^2y^3 es 80.
6. $27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$
7. Coeficiente de a^5b^2 es 21.
8. $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$
9. Coeficiente de x^4y^3 es 140.
10. Término constante es 625.

Ejercicios Aplicados

1. Calcula la probabilidad de obtener exactamente 3 caras en 6 lanzamientos de una moneda equilibrada.
2. Un pequeño negocio espera que el 20% de los clientes compren un producto nuevo. Si 15 clientes visitan la tienda, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 5 clientes compren el producto?
3. En una especie de planta, el 70% de las semillas germinan con éxito. Si se plantan 8 semillas, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 6 semillas germinen?

Ejercicios Aplicados

4 Determina la probabilidad de que en 10 intentos, un jugador de baloncesto que tiene una probabilidad del 80% de encestar un tiro, falle exactamente dos tiros.

5 Un código de seguridad utiliza un sistema de verificación donde cada intento tiene una probabilidad de 1% de éxito al azar. Si un atacante hace 200 intentos, ¿cuál es la probabilidad de que tenga exactamente 3 éxitos?

Soluciones

1. Probabilidad de 3 caras en 6 lanzamientos:

$$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} = 0.3125\ (31.25\%)$$

2. Probabilidad de que exactamente 5 de 15 clientes compren:

$$\binom{15}{5}(0.20)^5(0.80)^{10} \approx 0.103\ (10.3\%)$$

3. Probabilidad de que 6 de 8 semillas germinen:

$$\binom{8}{6}(0.70)^6(0.30)^2 \approx 0.197\ (19.7\%)$$

Ejercicios Aplicados

4. Probabilidad de que un jugador falle 2 de 10 tiros:

$$\binom{10}{2}(0.20)^2(0.80)^8 \approx 0.302\ (30.2\%)$$

5. Probabilidad de 3 éxitos en 200 intentos:

$$\binom{200}{3}(0.01)^3(0.99)^{197} \approx 0.061\ (6.1\%)$$