

Ecuaciones

Claudio Carrasco, Rodrigo Contreras y Geir Da Silva

by

Profesores Mates 1

Introducción

Materias que repasaremos

Temario

1. Ecuaciones

- 1.1 ¿Qué es una ecuación?
- 1.2 Ecuaciones lineales
- 1.3 Gráfica lineal
- 1.4 Ecuaciones cuadráticas
- 1.5 Gráfica cuadrática

Ecuaciones

¿Qué es una ecuación?

En una expresión algebraica con uno o más valores indeterminados, una ecuación es la búsqueda del valor adecuado para estas variables que satisfagan la igualdad.

Estos valores indeterminados están dados por símbolos, **usualmente** con las letras x, y, z

Ejemplos

1. $x + 1 = 0$

❖ $x = -1$

2. $y^2 = 25$

❖ $y = 5$

❖ $y = -5$

3. $z - t = 0$

❖ $z = 1, t = 1$

❖ $z = 4, t = 4$

❖ $z = -3, t = -3$

❖ $\dots$

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado, también conocida como ecuación lineal, es una expresión matemática en la que la incógnita (variable) tiene un exponente de 1.

Este tipo de ecuaciones se pueden resolver fácilmente utilizando operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división.

Ejemplos

1. $2x + 5 = 11$

❖ $2x = 11 - 5$

❖ $2x = 6$

▶ $x = 6 \div 2$

▶ $x = 3$

$$2 \cdot 3 + 5 = 11$$

2. $3(y - 4) = 15$

❖ $y - 4 = 15 \div 3$

❖ $y - 4 = 5$

▶ $y = 5 + 4$

▶ $y = 9$

$$3(9 - 4) = 15$$

Ejemplos

1. $\frac{1}{2}(3x + 6) = 9$

❖ $(3x + 6) = \frac{2}{1} \cdot 9$

❖ $3x + 6 = 18$

▶ $3x = 18 - 6$

▶ $3x = 12$

▶ $x = 12 \div 3$

▶ $x = 4$

$$\frac{1}{2}(3 \cdot 4 + 6) = 9$$

Ejercicios

1. $4(x - 2) = 12$

2. $3(x + 1) - 2(x - 3) = 1$

3. $\frac{3}{4}(x - 8) = \frac{1}{2}(2x - 5)$

4. $\frac{x}{2} + 3 = \frac{5x-2}{4}$

5. $7x - 3 = 2x + 5$

6. $4x + 2 = 3x - 5$

7. $\frac{2}{3}(3x + 2) = 2 - \frac{1}{3}(x + 5)$

8. $5x + 10 = 3x - 4$

9. $\frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{2} + 1$

Soluciones

1. $4(x - 2) = 12$

1. $x = 5$

2. $3(x + 1) - 2(x - 3) = 1$

2. $x = -8$

3. $\frac{3}{4}(x - 8) = \frac{1}{2}(2x - 5)$

3. $x = -14$

4. $\frac{x}{2} + 3 = \frac{5x-2}{4}$

4. $x = \frac{14}{3}$

5. $7x - 3 = 2x + 5$

5. $x = \frac{8}{5}$

6. $4x + 2 = 3x - 5$

6. $x = -7$

7. $\frac{2}{3}(3x + 2) = 2 - \frac{1}{3}(x + 5)$

7. $x = -\frac{3}{7}$

8. $5x + 10 = 3x - 4$

8. $x = -7$

9. $\frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{2} + 1$

9. $x = -18$

Interpretación gráfica

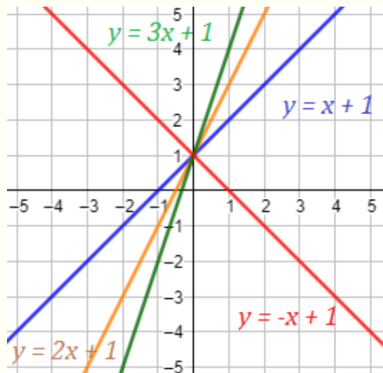
Cuando vemos una ecuación (lineal) de la forma:

$$mx + n = 0$$

podemos considerar la función afín $y = mx + n$. En este contexto, resolver la ecuación original es equivalente a encontrar en qué punto la gráfica de la función corta al eje X .

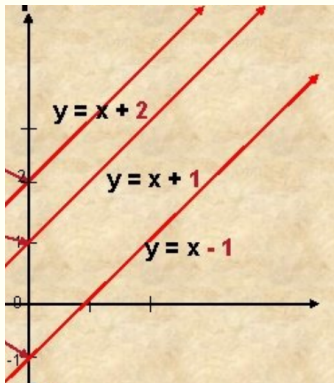
Interpretación gráfica

El valor de m se llama *pendiente* y determina qué tan inclinada está la línea de la gráfica.



Interpretación gráfica

El valor de n se llama *coeficiente de posición* y determina "dónde comienza" la gráfica de la función.



Ejercicios

Haga un bosquejo de los gráficos de las siguientes funciones afines y encuentre el punto en el que intersectan con el eje X

1. $y = 4(x - 2) - 12$

2. $y = x + 8$

3. $y = \frac{3}{4}(x - 8) - \frac{1}{2}(2x - 5)$

4. $y = \frac{2x}{4} - \frac{5x-2}{4} + 3$

5. $y = (5x - 3) - 5$

6. $y = (4x + 2) - (3x - 5)$

Soluciones de la ecuación lineal

La recta afín corta al eje x en

$$x = \frac{-n}{m}$$

1. Si la recta tiene una pendiente distinta de cero siempre cortará al eje x en algún punto.
2. Sin embargo, sabemos que una recta paralela NO corta al eje x , que no sea el eje x mismo. (No tiene solución)
3. O bien, si es el eje x mismo, pasará sobre todos los valores de x . (Tiene infinitas soluciones).

Ejercicios

Haga un bosquejo de los gráficos de las siguientes funciones afines y encuentre el punto en el que intersectan con el eje X

1. $y = 4(x - 2) - 12$

1. $(5, 0)$

2. $y = x + 8$

2. $(-8, 0)$

3. $y = \frac{3}{4}(x - 8) - \frac{1}{2}(2x - 5)$

3. $(-14, 0)$

4. $y = \frac{2x}{4} - \frac{5x-2}{4} + 3$

4. $(\frac{14}{3}, 0)$

5. $y = (5x - 3) - 5$

5. $(\frac{8}{5}, 0)$

6. $y = (4x + 2) - (3x - 5)$

6. $(-7, 0)$

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado, también conocida como ecuación cuadrática, es una expresión en la que la incógnita (variable) alcanza un exponente máximo de 2. **Estas ecuaciones dan como resultado hasta dos posibles soluciones.**

Este tipo de ecuaciones requieren un trabajo más cuidadoso y existen distintos métodos para hacerlo.

- ❖ Factorización
- ❖ Fórmula cuadrática
- ❖ Gráficamente

Factorización

Si tenemos una expresión como la siguiente:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Podemos intentar factorizar la expresión algebraica obteniendo:

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

Como, utilizando números reales, la única manera de multiplicar dos números y que el producto sea cero es que **alguno** de ellos sea cero. Entonces nos quedamos con dos posibles opciones.

Factorización

$$x - 6 \Rightarrow x = 6$$

$$x - 2 \Rightarrow x = 2$$

Obteniendo así las dos posibles soluciones de la ecuación.

Ejemplos

1. $x^2 + 5x - 14 = 0$

❖ $(x + 7)(x - 2) = 0$

▶ $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

▶ $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

2. $2x^2 + 3x - 5 = 0$

❖ $(2x + 5)(x - 1) = 0$

▶ $2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

▶ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización

1. $x^2 + 6x + 9 = 0$

2. $x^2 + 8x + 12 = 0$

3. $x^2 - 25 = 0$

4. $x^2 + 4x + 4 = 0$

5. $3x^2 + 5x + 2 = 0$

6. $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Soluciones

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización

1. $x^2 + 6x + 9 = 0$

❖ $(x + 3)(x + 3) = 0$

▶ $x = -3$

2. $x^2 + 8x + 12 = 0$

❖ $(x + 6)(x + 2) = 0$

▶ $x_1 = -6$

▶ $x_2 = -2$

3. $x^2 - 25 = 0$

❖ $(x + 5)(x - 5) = 0$

▶ $x_1 = -5$

▶ $x_2 = 5$

4. $x^2 + 4x + 4 = 0$

❖ $(x + 2)^2 = 0$

▶ $x = -2$

Soluciones

$$5 \quad 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\text{✚} \quad (3x + 2)(x + 1) = 0$$

$$\text{▶} \quad 3x + 2 = 0$$

$$\text{▶} \quad \Rightarrow 3x = -2$$

$$\text{▶} \quad \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{▶} \quad x + 1 = 0$$

$$\text{▶} \quad \Rightarrow x = -1$$

$$5 \quad 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\text{✚} \quad (3x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\text{▶} \quad 3x - 1 = 0$$

$$\text{▶} \quad \Rightarrow 3x = 1$$

$$\text{▶} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{▶} \quad x - 2 = 0$$

$$\text{▶} \quad \Rightarrow x = 2$$

Fórmula cuadrática

Dada una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las soluciones se pueden encontrar con la siguiente fórmula general:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ADVERTENCIA: Es mejor usar esta fórmula sólo si no es posible obtener una factorización de manera rápida, pues suele ser engorroso.

Ejemplos

1. $x^2 + 5x - 14 = 0$

$$\text{❖ } \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2}$$

$$\text{▶ } x_1 = \frac{-5+9}{2} = 2$$

$$\text{▶ } x_2 = \frac{-5-9}{2} = -7$$

2. $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$$\text{❖ } \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$\text{▶ } x_1 = \frac{-3+7}{4} = 1$$

$$\text{▶ } x_2 = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2}$$

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.

1. $x^2 + 6x + 9 = 0$

2. $x^2 + 8x + 12 = 0$

3. $x^2 - 25 = 0$

4. $x^2 + 4x + 4 = 0$

5. $3x^2 + 5x + 2 = 0$

6. $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Soluciones

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.

1. $x^2 + 6x + 9 = 0$

2. $x^2 + 8x + 12 = 0$

3. $x^2 - 25 = 0$

4. $x^2 + 4x + 4 = 0$

5. $3x^2 + 5x + 2 = 0$

6. $3x^2 - 7x + 2 = 0$

1. $x_1 = -3, x_2 = -3$

2. $x_1 = -6, x_2 = -2$

3. $x_1 = -5, x_2 = 5$

4. $x_1 = -2, x_2 = -2$

5. $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -1$

6. $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}$

Discriminante

Notemos que dentro de la fórmula general hay una raíz

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Llamaremos a la cantidad subradical el **discriminante** de la ecuación.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se representa con un triángulo pues su uso da lugar a tres opciones.

Discriminante

- ❖ Si el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones (*reales*)
- ❖ Si el discriminante es cero, tendrá solución única.
- ❖ Si el discriminante es positivo, tendrá dos soluciones distintas.

Interpretación gráfica

Cuando vemos una ecuación (cuadrática) de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

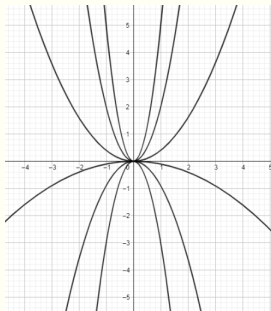
Podemos considerar la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. En este contexto, resolver la ecuación original es equivalente a encontrar en qué puntos la gráfica de la función corta al eje X.

Interpretación gráfica

El valor de a indica la *concavidad* de la parábola. Mientras menor sea su valor absoluto, más "plana" se verá la gráfica.

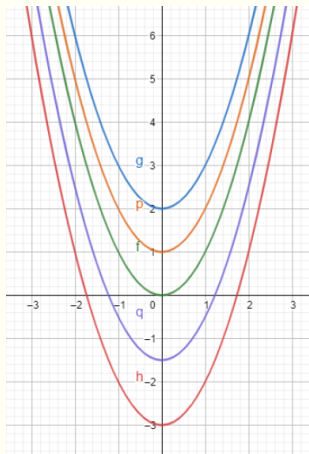
❖ $a > 0$ cara feliz :)

❖ $a < 0$ cara triste :(



Interpretación gráfica

El valor de c indica un movimiento vertical de la parábola.



Ejemplos

En la imagen se aprecian las funciones

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$y = -2x^2 + 4x - 1$$

