Este apéndice en matemáticas tiene la intención de ser un breve repaso de operaciones y métodos. Desde las primeras etapas de este curso usted debió estar familiarizado con las técnicas algebraicas básicas, la geometría analítica y la trigonometría. Las secciones acerca de cálculo diferencial e integral son más detalladas y se dedican a aquellos estudiantes que tengan dificultad para aplicar los conceptos del cálculo a situaciones físicas.

B.1 Notación científica

Con frecuencia muchas cantidades utilizadas por los científicos tienen valores muy grandes o muy pequeños. La rapidez de la luz, por ejemplo, es de aproximadamente 300 000 000 m/s, y la tinta requerida para hacer el punto sobre una *i* en este libro tiene una masa de aproximadamente 0.000 000 001 kg. Obviamente, es muy complicado leer, escribir y seguir la pista de tales números. Este problema se evita al usar un método que incorpora potencias del número 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente. El número de ceros corresponde a la potencia a la que se eleva el diez, llamado **exponente** de diez. Por ejemplo, la rapidez de la luz, 300 000 000 m/s, se puede expresar como 3.00×10^8 m/s.

En este método algunos números representativos menores que la unidad son los siguientes:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,1$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,01$$

En estos casos, el número de lugares que el punto decimal está a la izquierda del dígito 1 es igual al valor del exponente (negativo). Los números expresados con alguna potencia de diez, multiplicados por otro número entre uno y diez se dice que están en **notación científica**. Por ejemplo, la notación científica para 5 943 000 000 es 5.943×10^9 y para 0.000 083 2 es 8.32×10^{-5}.

Cuando se multiplican números expresados en notación científica, la siguiente regla general es muy útil:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \qquad \textbf{(B.1)}$$

donde n y m pueden ser *cualquier* número (no necesariamente enteros). Por ejemplo, $10^2 \times 10^5 = 10^7$. La regla también se aplica si uno de los exponentes es negativo: $10^3 \times 10^{-8} = 10^{-5}$.

Cuando se dividen números expresados en notación científica, observe que

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m} \quad \textbf{(B.2)}$$

Ejercicios

Con ayuda de las reglas anteriores, verifique las respuestas de las siguientes ecuaciones:

1. $86\,400 = 8.64 \times 10^4$
2. $9\,816\,762.5 = 9.816\,762\,5 \times 10^6$
3. $0.000\,000\,039\,8 = 3.98 \times 10^{-8}$
4. $(4.0 \times 10^8)(9.0 \times 10^9) = 3.6 \times 10^{18}$
5. $(3.0 \times 10^7)(6.0 \times 10^{-12}) = 1.8 \times 10^{-4}$
6. $\dfrac{75 \times 10^{-11}}{5.0 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-7}$
7. $\dfrac{(3 \times 10^6)(8 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{17})(6 \times 10^5)} = 2 \times 10^{-18}$

B.2 Álgebra

Algunas reglas básicas

Cuando se realizan operaciones algebraicas, se aplican las leyes de la aritmética. Los símbolos como x, y y z por lo general se usan para representar cantidades no especificadas, llamadas **incógnitas**.

Primero, considere la ecuación

$$8x = 32$$

Si quiere resolver para x, divida (o multiplique) cada lado de la ecuación por el mismo factor sin destruir la igualdad. En este caso, si divide ambos lados entre 8, tiene

$$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8}$$

$$x = 4$$

A continuación considere la ecuación

$$x + 2 = 8$$

En este tipo de expresión se puede sumar o restar la misma cantidad de cada lado. Si resta 2 de cada lado, obtiene

$$x + 2 - 2 = 8 - 2$$

$$x = 6$$

En general, si $x + a = b$, por tanto $x = b - a$.

Ahora considere la ecuación

$$\frac{x}{5} = 9$$

Si multiplica cada lado por 5, queda x sola en la izquierda y 45 a la derecha:

$$\left(\frac{x}{5}\right)(5) = 9 \times 5$$

$$x = 45$$

En todos los casos, *cualquier operación que realice en el lado izquierdo de la igualdad también la debe realizar en el lado derecho.*

Debe recordar las siguientes reglas para multiplicar, dividir, sumar y restar fracciones, donde a, b, c y d son cuatro números:

	Regla	Ejemplo
Multiplicar	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$
Dividir	$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2/3}{4/5} = \frac{(2)(5)}{(4)(3)} = \frac{10}{12}$
Sumar	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{(2)(5) - (4)(3)}{(3)(5)} = -\frac{2}{15}$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios resuelva para x.

	Respuestas
1. $a = \frac{1}{1 + x}$	$x = \frac{1 - a}{a}$
2. $3x - 5 = 13$	$x = 6$
3. $ax - 5 = bx + 2$	$x = \frac{7}{a - b}$
4. $\frac{5}{2x + 6} = \frac{3}{4x + 8}$	$x = -\frac{11}{7}$

Potencias

Cuando multiplique potencias de una cantidad conocida x, aplique las siguientes reglas:

$$x^n x^m = x^{n+m} \tag{B.3}$$

Por ejemplo, $x^2 x^4 = x^{2+4} = x^6$.

Cuando divida potencias de una cantidad conocida, la regla es

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \tag{B.4}$$

Por ejemplo, $x^8/x^2 = x^{8-2} = x^6$.

Una potencia que es fracción, como $\frac{1}{3}$, corresponde a una raíz del modo siguiente:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \tag{B.5}$$

Por ejemplo, $4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.587\,4$. (Para tales cálculos es útil una calculadora científica.)

Por último, cualquier cantidad x^n elevada a la potencia m es

$$(x^n)^m = x^{nm} \tag{B.6}$$

La tabla B.1 resume las reglas de exponentes.

TABLA B.1

Reglas de exponentes
$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^n x^m = x^{n+m}$
$x^n/x^m = x^{n-m}$
$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
$(x^n)^m = x^{nm}$

Ejercicios

Verifique las siguientes ecuaciones:

1. $3^2 \times 3^3 = 243$
2. $x^5 x^{-8} = x^{-3}$
3. $x^{10}/x^{-5} = x^{15}$
4. $5^{1/3} = 1.709\,976$ (Use su calculadora)
5. $60^{1/4} = 2.783\,158$ (Use su calculadora)
6. $(x^4)^3 = x^{12}$

Factorización

Las siguientes son algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación:

$ax + ay + az = a(x + y + z)$ factor común

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ cuadrado perfecto

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ diferencia de cuadrados

Ecuaciones cuadráticas

La forma general de una ecuación cuadrática es

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{B.7}$$

donde x es la cantidad desconocida y a, b y c son factores numéricos conocidos como **coeficientes** de la ecuación. Esta ecuación tiene dos raíces, conocidas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{B.8}$$

Si $b^2 \geq 4ac$, las raíces son reales.

EJEMPLO B.1

La ecuación $x^2 + 5x + 4 = 0$ tiene las siguientes raíces que corresponden a los dos signos del término raíz cuadrada:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x_+ = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \qquad x_- = \frac{-5 - 3}{2} = -4$$

donde x_+ se refiere a la raíz correspondiente al signo positivo y x_- se refiere a la raíz que corresponde al signo negativo.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

	Respuestas	
1. $x^2 + 2x - 3 = 0$	$x_+ = 1$	$x_- = -3$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0$	$x_+ = 2$	$x_- = \frac{1}{2}$
3. $2x^2 - 4x - 9 = 0$	$x_+ = 1 + \sqrt{22}/2$	$x_- = 1 - \sqrt{22}/2$

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal tiene la forma general

$$y = mx + b \tag{B.9}$$

donde m y b son constantes. A esta ecuación se le conoce como lineal porque la gráfica de y en función de x es una línea recta, como se muestra en la figura B.1. La constante b, llamada **ordenada al origen**, representa el valor de y en el que la línea recta interseca el eje y. La constante m es igual a la **pendiente** de la línea recta. Si dos puntos cualesquiera en la línea recta se especifican mediante las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), como en la figura B.1, la pendiente de la línea recta se expresa como

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{B.10}$$

Note que m y b pueden tener valores positivos o negativos. Si $m > 0$, la línea recta tiene una pendiente *positiva*, como en la figura B.1. Si $m < 0$, la línea recta tiene una pendiente *negativa*. En la figura B.1, tanto m como b son positivos. En la figura B.2 se muestran otras tres posibles situaciones.

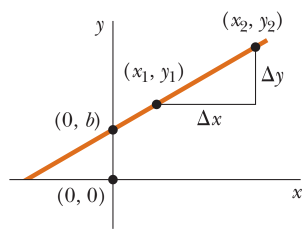


Figura B.1 Línea recta graficada sobre un sistema coordenado xy. La pendiente de la línea es la proporción de Δy a Δx.

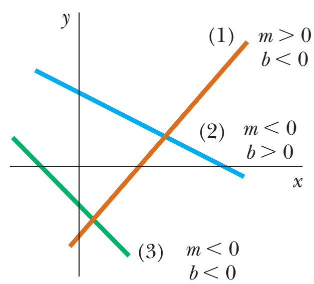


Figura B.2 La línea café tiene una pendiente positiva y una ordenada al origen negativa. La línea azul tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen positiva. La línea verde tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen negativa.

Ejercicios

1. Dibuje las gráficas de las siguientes líneas rectas: a) $y = 5x + 3$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = -3x - 6$.
2. Encuentre las pendientes de las líneas rectas descritas en el ejercicio 1.

Respuestas a) 5, b) -2, c) -3.

3. Encuentre las pendientes de las líneas rectas que pasan por los siguientes conjuntos de puntos: a) $(0, -4)$ y $(4, 2)$, b) $(0, 0)$ y $(2, -5)$ c) $(-5, 2)$ y $(4, -2)$.

Respuestas a) $\frac{3}{2}$, b) $-\frac{5}{2}$, c) $-\frac{4}{9}$.

Resolución de ecuaciones lineales simultáneas

Considere la ecuación $3x + 5y = 15$, que tiene dos incógnitas, x y y. Tal ecuación no tiene una solución única. Por ejemplo $(x = 0, y = 3)$, $(x = 5, y = 0)$ y $(x = 2, y = \frac{9}{5})$ son todas soluciones a esta ecuación.

Si un problema tiene dos incógnitas, una solución única sólo es posible si se tienen *dos* ecuaciones. En general, si un problema tiene n incógnitas, su solución requiere n ecuaciones. Para resolver dos ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas, x y y, resuelva una de las ecuaciones para x en términos de y y sustituya esta expresión en la otra ecuación.

EJEMPLO B.2

Resuelva las dos ecuaciones simultáneas

$$1) \qquad 5x + y = -8$$

$$2) \qquad 2x - 2y = 4$$

Solución De la ecuación 2), $x = y + 2$. La sustitución de esta ecuación en la ecuación 1) produce

$$5(y + 2) + y = -8$$

$$6y = -18$$

$$y = \boxed{-3}$$

$$x = y + 2 = \boxed{-1}$$

Solución alternativa Multiplique cada término en la ecuación 1) por el factor 2 y sume el resultado a la ecuación 2):

$$\begin{array}{rl} 10x + 2y &= -16 \\ 2x - 2y &= 4 \\ \hline 12x \qquad &= -12 \end{array}$$

$$x = \boxed{-1}$$

$$y = x - 2 = \boxed{-3}$$

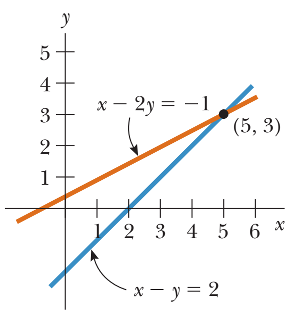


Figura B.3 Solución gráfica para dos ecuaciones lineales.

Dos ecuaciones lineales que contienen dos incógnitas también se pueden resolver mediante un método gráfico. Si las líneas rectas que corresponden a las dos ecuaciones se grafican en un sistema coordenado convencional, la intersección de las dos líneas representa la solución. Por ejemplo, considere las dos ecuaciones

$$x - y = 2$$

$$x - 2y = -1$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura B.3. La intersección de las dos líneas tiene las coordenadas $x = 5$ y $y = 3$, que representan la solución a las ecuaciones. Debe comprobar esta solución mediante la técnica analítica explicada anteriormente.

Ejercicios

Resuelva los siguientes pares de ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas:

	Respuestas
1. $x + y = 8$ $x - y = 2$	$x = 5,\ y = 3$
2. $98 - T = 10a$ $T - 49 = 5a$	$T = 65,\ a = 3.27$
3. $6x + 2y = 6$ $8x - 4y = 28$	$x = 2,\ y = -3$

Logaritmos

Suponga que una cantidad x se expresa como una potencia de alguna cantidad a:

$$x = a^y \tag{B.11}$$

El número a se llama **número** base. El **logaritmo** de x respecto a la base a es igual al exponente al que se debe elevar la base para satisfacer la expresión $x = a^y$:

$$y = \log_a x \tag{B.12}$$

A la inversa, el **antilogaritmo** de y es el número x:

$$x = \text{antilog}_a\, y \tag{B.13}$$

En la práctica, las dos bases usadas con más frecuencia son la base 10, llamada base de logaritmo *común*, y la base $e = 2.718\,282$, llamada constante de Euler o base de logaritmo *natural*. Cuando se usan logaritmos comunes:

$$y = \log_{10} x \quad (\text{o } x = 10^y) \tag{B.14}$$

Cuando se usan logaritmos naturales:

$$y = \ln x \quad (\text{o } x = e^y) \tag{B.15}$$

Por ejemplo, $\log_{10} 52 = 1.716$, de modo que $\text{antilog}_{10} 1.716 = 10^{1.716} = 52$. Del mismo modo, $\ln 52 = 3.951$, de modo que $\text{antiln } 3.951 = e^{3.951} = 52$.

En general, note que puede convertir entre base 10 y base e con la igualdad

$$\ln x = (2.302\,585) \log_{10} x \tag{B.16}$$

Por último, las siguientes son algunas propiedades útiles de los logaritmos:

$$\left.\begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b \\ \log(a/b) &= \log a - \log b \\ \log(a^n) &= n \log a \end{aligned}\right\} \text{cualquier base}$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

B.3 Geometría

La **distancia** d entre dos puntos que tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{B.17}$$

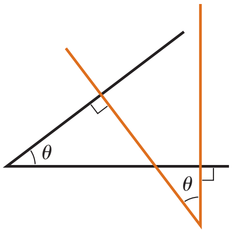


Figura B.4 Los ángulos son iguales porque sus lados son perpendiculares.

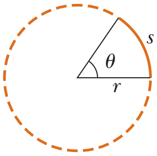


Figura B.5 El ángulo θ en radianes es el cociente de la longitud del arco s al radio r del círculo.

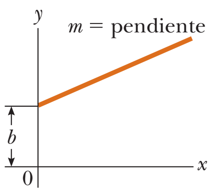


Figura B.6 Una línea recta con una pendiente m y una ordenada al origen b.

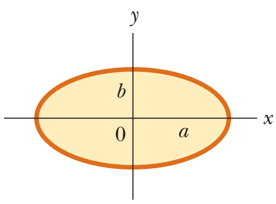


Figura B.7 Una elipse con semieje mayor a y semieje menor b.

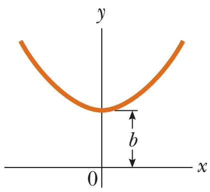


Figura B.8 Una parábola con su vértice en $y = b$.

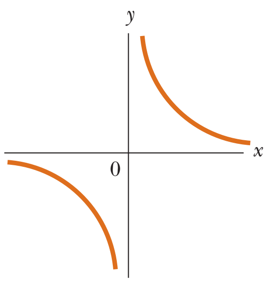
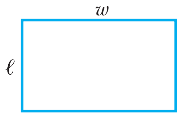
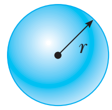
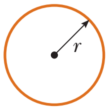
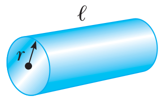
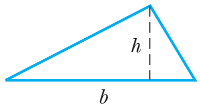
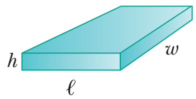


Figura B.9 Una hipérbola.

TABLA B.2

Información útil para geometría

Forma	Área o volumen	Forma	Área o volumen
 Rectángulo	Área $= \ell w$	 Esfera	Área superficial $= 4\pi r^2$ Volumen $= \frac{4\pi r^3}{3}$
 Círculo	Área $= \pi r^2$ Circunferencia $= 2\pi r$	 Cilindro	Superficie lateral área $= 2\pi r\ell$ Volumen $= \pi r^2\ell$
 Triángulo	Área $= \frac{1}{2}bh$	 Caja rectangular	Área superficial $= 2(\ell h + \ell w + hw)$ Volumen $= \ell wh$

Dos ángulos son iguales si sus lados son perpendiculares, lado derecho con lado derecho y lado izquierdo con lado izquierdo. Por ejemplo, los dos ángulos marcados θ en la figura B.4 son iguales debido a la perpendicularidad de los lados de los ángulos. Para distinguir los lados izquierdo y derecho de un ángulo, imagine estar de pie en el vértice del ángulo y de frente al ángulo.

Medida radián: la longitud de arco s de un arco circular (figura B.5) es proporcional al radio r para un valor fijo de θ (en radianes):

$$s = r\theta \qquad \theta = \frac{s}{r} \tag{B.18}$$

La tabla B.2 da las **áreas** y **volúmenes** para varias formas geométricas usadas en todo el texto.

La ecuación de una **línea recta** (figura B.6) es

$$y = mx + b \tag{B.19}$$

donde b es la ordenada al origen y m la pendiente de la línea.

La ecuación de un **círculo** de radio R con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{B.20}$$

La ecuación de una **elipse** que tiene el origen en su centro (figura B.7) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{B.21}$$

donde a es la distancia del eje semimayor (el más largo) y b es la distancia del eje semimenor (el más corto).

La ecuación de una **parábola** cuyo vértice está en $y = b$ (figura B.8) es

$$y = ax^2 + b \tag{B.22}$$

La ecuación de una **hipérbola rectangular** (figura B.9) es

$$xy = \text{constante} \tag{B.23}$$

B.4 Trigonometría

La parte de las matemáticas en función de las propiedades especiales del triángulo rectángulo se llama trigonometría. Por definición, un triángulo rectángulo es un triángulo que contiene un ángulo de 90°. Considere el triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10, donde el lado a es opuesto al ángulo θ, el lado b es adyacente al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas por tal triángulo son el seno (sen), el coseno (cos) y la tangente (tan). En términos del ángulo θ, estas funciones se definen del modo siguiente:

$$\operatorname{sen}\,\theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \tag{B.24}$$

$$\cos\,\theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \tag{B.25}$$

$$\tan\,\theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b} \tag{B.26}$$

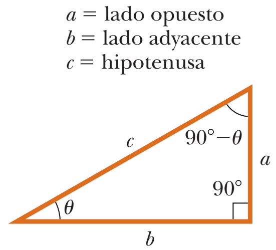


Figura B.10 Un triángulo rectángulo, que se usa para definir las funciones básicas de la trigonometría.

El teorema de Pitágoras proporciona la siguiente correspondencia entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{B.27}$$

A partir de las definiciones anteriores y del teorema de Pitágoras se sigue que

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\,\theta = \frac{\operatorname{sen}\,\theta}{\cos\,\theta}$$

Las funciones cosecante, secante y cotangente se definen como

$$\csc\,\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\,\theta} \qquad \sec\,\theta = \frac{1}{\cos\,\theta} \qquad \cot\,\theta = \frac{1}{\tan\,\theta}$$

Las siguientes correspondencias se deducen directamente del triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10:

$$\operatorname{sen}\,\theta = \cos\,(90° - \theta)$$

$$\cos\,\theta = \operatorname{sen}\,(90° - \theta)$$

$$\cot\,\theta = \tan\,(90° - \theta)$$

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\operatorname{sen}\,(-\theta) = -\operatorname{sen}\,\theta$$

$$\cos\,(-\theta) = \cos\,\theta$$

$$\tan\,(-\theta) = -\tan\,\theta$$

Las correspondencias que siguen son aplicables a *cualquier* triángulo, como se muestra en la figura B.11:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\text{Ley de cosenos} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$

$$\text{Ley de senos} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

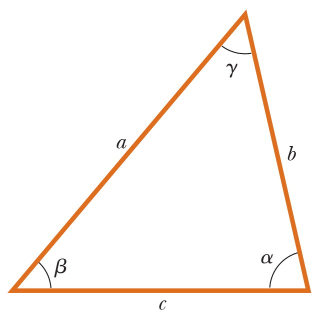


Figura B.11 Un triángulo arbitrario no rectángulo.

La tabla B.3 (página A-12) menciona algunas identidades trigonométricas útiles.

EJEMPLO B.3

Considere el triángulo rectángulo de la figura B.12 en el que $a = 2.00$, $b = 5.00$ y c es desconocido. A partir del teorema de Pitágoras se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2.00^2 + 5.00^2 = 4.00 + 25.0 = 29.0$$

$$c = \sqrt{29.0} = \boxed{5.39}$$

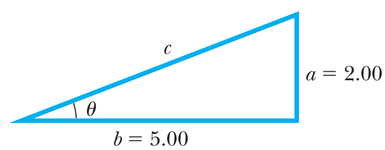


Figura B.12 (Ejemplo B.3)

Para encontrar el ángulo θ, note que

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{2.00}{5.00} = 0.400$$

Con una calculadora se encuentra que

$$\theta = \tan^{-1}(0.400) = \boxed{21.8°}$$

donde $\tan^{-1}(0.400)$ es la notación para "ángulo cuya tangente es 0.400", que a veces se escribe como arctan (0.400).

TABLA B.3

Algunas identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$	$\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$
$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$	$\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$	$1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$
$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\tan\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen}B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$$
$$\operatorname{sen}A \pm \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}(A \pm B)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(A \mp B)\right]$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(A + B)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(A - B)\right]$$
$$\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}(A + B)\right]\operatorname{sen}\left[\tfrac{1}{2}(B - A)\right]$$

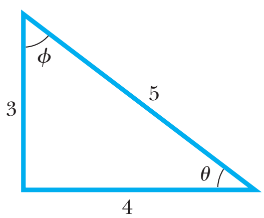


Figura B.13 (Ejercicio 1)

Ejercicios

1. En la figura B.13, identifique a) el lado opuesto a θ, b) el lado adyacente a ϕ y luego encuentre c) $\cos\theta$, d) $\operatorname{sen}\phi$ y e) $\tan\phi$.

Respuestas a) 3, b) 3, c) $\frac{4}{5}$, d) $\frac{4}{5}$, e) $\frac{4}{3}$.

2. En cierto triángulo rectángulo, los dos lados que son mutuamente perpendiculares miden 5.00 m y 7.00 m. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

Respuesta 8.60 m.

3. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 3.00 m de largo y uno de sus ángulos 30°. a) ¿Cuál es la longitud del lado opuesto al ángulo de 30°? b) ¿Cuál es el lado adyacente al ángulo de 30°?

Respuestas a) 1.5 m, b) 2.6 m.

B.5 Series de expansión

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \tfrac{1}{2}x^2 \pm \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} x \text{ en radianes}$$

Para $x << 1$, se pueden usar las siguientes aproximaciones:[1]

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \qquad \operatorname{sen} x \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x \qquad \cos x \approx 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x \qquad \tan x \approx x$$

B.6 Cálculo diferencial

En diferentes ramas de la ciencia, a veces, es necesario usar las herramientas básicas del cálculo, inventadas por Newton, para describir fenómenos físicos. El uso del cálculo es fundamental en el tratamiento de diferentes problemas en mecánica newtoniana, electricidad y magnetismo. En esta sección simplemente se establecen algunas propiedades básicas y "reglas empíricas" que deben ser un útil repaso para el estudiante.

Primero, se debe especificar una **función** que relacione una variable con otra (por ejemplo, una coordenada como función del tiempo). Suponga que una de las variables se llama y (la variable dependiente) y la otra x (la variable independiente). Puede tener una correspondencia funcional como

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si a, b, c y d son constantes específicas, y se puede calcular para cualquier valor de x. Por lo general se trata con funciones continuas, es decir, aquellas para las que y varía "de manera uniforme" con x.

La **derivada** de y respecto a x se define como el límite a medida cuando Δx tiende a cero de las pendientes de las cuerdas dibujadas entre dos puntos sobre la curva y en función de x. En términos matemáticos, esta definición se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \qquad \textbf{(B.28)}$$

donde Δy y Δx se definen como $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ (figura B.14). Observe que dy/dx *no* significa dy dividido entre dx, simplemente es una notación del proceso de límite de la derivada según se define por la ecuación B.28.

Una expresión útil de recordar cuando $y(x) = ax^n$, donde a es una *constante* y n es *cualquier* número positivo o negativo (entero o fracción), es

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}} \qquad \textbf{(B.29)}$$

Si $y(x)$ es un polinomio o función algebraica de x, se aplica la ecuación B.29 a *cada* término en el polinomio y se saca $d[\text{constante}]/dx = 0$. En los ejemplos B.4 al B.7 se evalúan las derivadas de varias funciones.

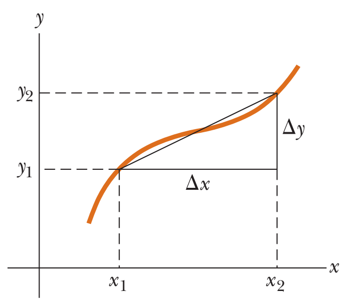


Figura B.14 Las distancias Δx y Δy se usan para definir la derivada de esta función en un punto.

[1] Las aproximaciones para las funciones sen x, cos x y tan x son para $x \leq 0.1$ rad.

TABLA B.4

Derivadas de varias funciones

$$\frac{d}{dx}(a) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} ax) = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \operatorname{sen} ax$$

$$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a\sec^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a\csc^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} ax) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} ax) = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} ax) = \frac{a}{1+a^2x^2}$$

Nota: Los símbolos a y n representan constantes.

Propiedades especiales de la derivada

A. Derivada del producto de dos funciones. Si una función $f(x)$ se conoce por el producto de dos funciones, por decir, $g(x)$ y $h(x)$, la derivada de $f(x)$ se define como

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = g\frac{dh}{dx} + h\frac{dg}{dx} \tag{B.30}$$

B. Derivada de la suma de dos funciones. Si una función $f(x)$ es igual a la suma de dos funciones, la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} \tag{B.31}$$

C. Regla de la cadena para cálculo diferencial. Si $y = f(x)$ y $x = g(z)$, en tal caso dy/dz se puede escribir como el producto de dos derivadas:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} \tag{B.32}$$

D. La segunda derivada. La segunda derivada de y respecto a x se define como la derivada de la función dy/dx (la derivada de la derivada). Por lo general se escribe como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{B.33}$$

Algunas de las derivadas de las funciones más comúnmente usadas se mencionan en la tabla B.4.

EJEMPLO B.4

Suponga que $y(x)$ (es decir, y como función de x) se conoce por

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

donde a y b son constantes. Se sigue que

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x) &= a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c \\ &= a(x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c \end{aligned}$$

de modo que

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3) + b\,\Delta x$$

Al sustituir esto en la ecuación B.28 se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}[3ax^2 + 3ax\,\Delta x + a\,\Delta x^2] + b$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$$

EJEMPLO B.5

Encuentre la derivada de

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

Solución Al aplicar la ecuación B.29 a cada término independientemente y recordar que d/dx (constante) $= 0$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{40x^4 + 12x^2 + 2}$$

EJEMPLO B.6

Encuentre la derivada de $y(x) = x^3/(x+1)^2$ respecto a x.

Solución Esta función se puede rescribir como $y(x) = x^3\,(x+1)^{-2}$ y aplicar la ecuación B.30:

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^{-2}\,\frac{d}{dx}(x^3) + x^3\,\frac{d}{dx}(x+1)^{-2}$$

$$= (x+1)^{-2}\,3x^2 + x^3(-2)(x+1)^{-3}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}}$$

EJEMPLO B.7

Una fórmula útil que se sigue de la ecuación B.30 es la derivada del cociente de dos funciones. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h\dfrac{dg}{dx} - g\dfrac{dh}{dx}}{h^2}$$

Solución El cociente se puede escribir como gh^{-1} y luego aplicar las ecuaciones B.29 y B.30:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = g\,\frac{d}{dx}(h^{-1}) + h^{-1}\,\frac{d}{dx}(g)$$

$$= -gh^{-2}\,\frac{dh}{dx} + h^{-1}\,\frac{dg}{dx}$$

$$= \frac{h\dfrac{dg}{dx} - g\dfrac{dh}{dx}}{h^2}$$

B.7 Cálculo integral

La integración se considera como el inverso de la derivación. Como ejemplo, considere la expresión

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b \quad \textbf{(B.34)}$$

que fue el resultado de derivar la función

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

en el ejemplo B.4. La ecuación B.34 se puede escribir como $dy = f(x)\ dx = (3ax^2 + b)\ dx$ y obtener $y(x)$ al "sumar" en todos los valores de x. En términos matemáticos, esta operación inversa se escribe como

$$y(x) = \int f(x)\ dx$$

Para la función $f(x)$ conocida por la ecuación B.34 se tiene

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)\ dx = ax^3 + bx + c$$

donde c es una constante de integración. Este tipo de integral se llama *integral indefinida*, porque su valor depende de la elección de c.

Una **integral indefinida** general $I(x)$ se define como

$$I(x) = \int f(x)\ dx \quad \textbf{(B.35)}$$

donde $f(x)$ se llama *integrando* y $f(x) = dI(x)/dx$.

Para una función *continua general* $f(x)$, la integral se puede describir como el área bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre dos valores específicos de x, por decir, x_1 y x_2, como en la figura B.15.

El área del elemento azul en la figura B.15 es aproximadamente $f(x_i)\ \Delta x_i$. Si suma todos estos elementos de área entre x_1 y x_2 y toma el límite de esta suma como $\Delta x_i \to 0$, obtiene el área *verdadera* bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre los límites x_1 y x_2:

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx \quad \textbf{(B.36)}$$

Las integrales del tipo definido por la ecuación B.36 se llaman **integrales definidas**.

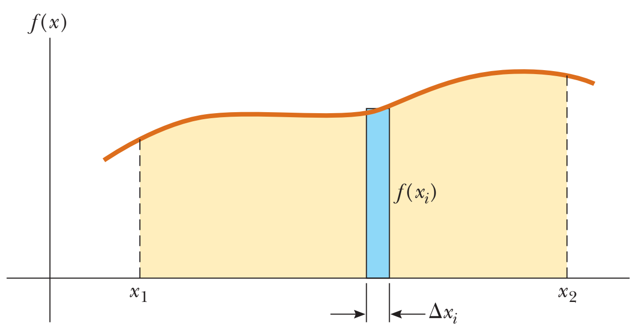


Figura B.15 La integral definida de una función es el área bajo la curva de la función entre los límites x_1 y x_2.

Una integral común que surge en situaciones prácticas tiene la forma

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \tag{B.37}$$

Este resultado es obvio, pues la derivación del lado derecho respecto a x da $f(x) = x^n$ directamente. Si los límites de la integración se conocen, esta integral se vuelve una *integral definida* y se escribe

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^{\,n+1} - x_1^{\,n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \tag{B.38}$$

EJEMPLOS

1. $\displaystyle\int_0^a x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_0^a = \frac{a^3}{3}$

2. $\displaystyle\int_0^b x^{3/2}dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}\bigg]_0^b = \tfrac{2}{5}b^{5/2}$

3. $\displaystyle\int_3^5 x\,\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg]_3^5 = \frac{5^2 - 3^2}{2} = 8$

Integración parcial

A veces es útil aplicar el método de *integración parcial* (también llamado “integración por partes”) para evaluar ciertas integrales. Este método usa la propiedad

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{B.39}$$

donde u y v se eligen con *cuidado* para reducir una integral compleja a una más simple. En muchos casos, tienen que hacerse muchas reducciones. Considere la función

$$I(x) = \int x^2 e^x\,dx$$

que se puede evaluar al integrar por partes dos veces. Primero, si elige $u = x^2$, $v = e^x$, obtiene

$$\int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,d(e^x) = x^2 e^x - 2\int e^x x\,\,dx + c_1$$

Ahora, en el segundo término, elija $u = x$, $v = e^x$, que produce

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2x\,e^x + 2\int e^x\,dx + c_1$$

o

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c_2$$

TABLA B.5

Algunas integrales indefinidas (A cada una de estas integrales debe agregar una constante arbitraria.)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\text{siempre que } n \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{x+a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} \quad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} \quad (x^2-a^2>0)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\tfrac{1}{2}\ln(a^2 \pm x^2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} \quad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$$

$$\int x\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)dx = \tfrac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \ln ax\,dx = (x\ln ax) - x$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln(a+be^{cx})$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln(\cos ax) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax)$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{sen} ax)$$

$$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\left(\tan\frac{ax}{2}\right).$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax$$

$$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a}(\tan ax) - x$$

$$\int \cot^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}(\cot ax) - x$$

$$\int \operatorname{sen}^{-1} ax\,dx = x(\operatorname{sen}^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int \cos^{-1} ax\,dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

TABLA B.6

Integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{(Integral de probabilidad de Gauss)}$$

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_3 = \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\, dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$I_5 = \int_0^\infty x^5 e^{-ax^2}\, dx = \frac{d^2 I_1}{da^2} = \frac{1}{a^3}$$

$$\vdots$$

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_1$$

La diferencial perfecta

Otro método útil para recordar es el de la *diferencial perfecta*, en el que se busca un cambio de variable tal que la diferencial de la función sea la diferencial de la variable independiente que aparece en el integrando. Por ejemplo, considere la integral

$$I(x) = \int \cos^2 x \ \text{sen}\ x\ dx$$

Esta integral se vuelve fácil de evaluar si reescribe la diferencial como $d(\cos x) = -\text{sen}\ x\, dx$. En tal caso la integral se convierte en

$$\int \cos^2 x \ \text{sen}\ x\ dx = -\int \cos^2 x\, d(\cos x)$$

Si ahora se cambian variables, con $y = \cos x$, obtiene

$$\int \cos^2 x \ \text{sen}\ x\ dx = -\int y^2\, dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

La tabla B.5 (página A-18) menciona algunas integrales indefinidas útiles. La tabla B.6 da la integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas. Una lista más completa se puede encontrar en diferentes compendios, como *The Handbook of Chemistry and Physics* (Boca Ratón, Fl: CRC Press, que se publica anualmente).

B.8 Propagación de incertidumbre

En experimentos de laboratorio una actividad común es tomar mediciones que representan como datos no analizados. Estas mediciones son de varios tipos (longitud, intervalo de tiempo, temperatura, voltaje, y así sucesivamente) y se toman mediante varios instrumentos. Sin importar la medición y la calidad de la instrumentación, **siempre hay incertidumbre asociada con una medición física**. Esta incertidumbre es una combinación de la que se asocia con el instrumento y la relacionada con el sistema a medir. Un ejemplo de lo anterior es la incapacidad de determinar con exactitud la posición de una medición de longitud entre las líneas de una regleta. Otro ejemplo de incertidumbre relacionado con el sistema a medir es la variación de la temperatura dentro de una muestra de agua, de modo que es difícil determinar una sola temperatura para la muestra.

Las incertidumbres se expresan en dos formas. La **incertidumbre absoluta** se refiere a una incertidumbre expresada en las mismas unidades que la medición. Debido a eso, la longitud de una etiqueta de disco de computadora se puede expresar como (5.5 ± 0.1) cm. Sin embargo, la incertidumbre de ± 0.1 cm por sí misma no es lo suficientemente descriptiva para algunos propósitos. Esta incertidumbre es grande si la medición es 1.0 cm, pero es pequeña si la medición es 100 m. Para dar una explicación más descriptiva de la incertidumbre, se usa la **incertidumbre fraccionaria** o la **incertidumbre porcentual**. En este tipo de descripción la incertidumbre se divide entre la medición real. Por lo tanto, la longitud de la etiqueta del disco de computadora podría expresarse como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm \frac{0.1 \text{ cm}}{5.5 \text{ cm}} = 5.5 \text{ cm} \pm 0.018 \quad \text{(incertidumbre fraccionaria)}$$

o como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm 1.8\% \quad \text{(incertidumbre porcentual)}$$

Cuando se combinan mediciones en un cálculo, la incertidumbre porcentual en el resultado final por lo general es mayor que la incertidumbre en las mediciones individuales. A esto se le llama **propagación de incertidumbre** y es uno de los retos de la física experimental.

Algunas reglas simples pueden proporcionar estimaciones razonables de incertidumbre en un resultado calculado:

Multiplicación y división: Cuando las mediciones con incertidumbres se multiplican o dividen, sume las *incertidumbres porcentuales* para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo: El área de una placa rectangular

$$A = \ell w = (5.5 \text{ cm} \pm 1.8\%) \times (6.4 \text{ cm} \pm 1.6\%) = 35 \text{ cm}^2 \pm 3.4\%$$
$$= (35 \pm 1) \text{ cm}^2$$

Suma y resta: Cuando se suman o restan mediciones con incertidumbre, sume las *incertidumbres absolutas* para obtener la incertidumbre absoluta en el resultado.

Ejemplo: Un cambio en temperatura

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (99.2 \pm 1.5)°\text{C} - (27.6 \pm 1.5)°\text{C} = (71.6 \pm 3.0)°\text{C}$$
$$= 71.6°\text{C} \pm 4.2\%$$

Potencias: Si una medición se eleva a una potencia, la incertidumbre porcentual se multiplica por dicha potencia para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo: volumen de una esfera

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi(6.20 \text{ cm} \pm 2.0\%)^3 = 998 \text{ cm}^3 \pm 6.0\%$$
$$= (998 \pm 60) \text{ cm}^3$$

Para cálculos complicados muchas incertidumbres se suman juntas, lo que puede hacer que la incertidumbre en el resultado final sea indeseablemente grande. Los experimentos se deben diseñar de modo que los cálculos sean tan simples como sea posible.

Note que las incertidumbres en un cálculo siempre se suman. Como resultado, un experimento que involucre una resta se debe evitar, si es posible, en especial si las mediciones a restar están cercanas. El resultado de tal cálculo es una diferencia pequeña en las mediciones e incertidumbres que se suman. ¡Es posible que la incertidumbre en el resultado pueda ser mayor que el resultado mismo!