Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Campus Santiago
Primer Semestre de 2003

Derivadas

1. Determinar los valores de λ y ω para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\lambda}{1+x} & x \geq 1 \\ \dfrac{\omega x - x^2}{2} & x < 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

2. Muestre que $f(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable en $x = 0$

3. Sea f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostrar que f es derivable en $x = 0$

4. Pruebe que no existe ninguna recta que pase por el punto (1,2) que sea tangente a la parábola $y = 4 - x^2$.

5. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-2) y que es tangente a la curva $y = x^2 - 7$

6. Encontrar la derivada de las funciones

a) $y = \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$ *b*) $y = \cos(\operatorname{sen}(x))$ *c*) $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x}) \tan \sqrt[3]{x^2})$

d) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ *e*) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ *f*) $y = (x + \sqrt{x})^3$

g) $y = x^{\ln(x)}$ *f*) $y = e^{x^x}$ *h*) $y = \cos(\sqrt{1 - 3^x})$

7. Hallar los puntos de la curva $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tales que la recta tangente es paralela a la recta $y = x$.

8. Probar que la normal a una parábola en cualquiera de sus puntos, P_0, es bisectriz del ángulo que forman el radio focal de P_0 y la recta que pasa por P_0 paralela al eje de la parábola.

9. Considerar las curvas $f(x) = x^2 - a^2$ y $g(x) = a^2 - x^2$. f y g se intersectan en el punto P de abscisa $x = a$. Para que valores de a, el ángulo de intersección, entre f y g en P es $\frac{\pi}{4}$?

10. Calcular el ángulo de intersección de las siguientes curvas: $x^2 + y^2 - 4x = 1$ y $x^2 + y^2 - 2y = 9$

11. Si $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{|x| + 1}$ y $f(1) = 2$. Argumente que se puede aplicar el teorema de la función inversa en un intervalo abierto que contiene al 1 y calcule $(f^{-1})'(2)$.

12. Dos autos se cruzan a las 12:00 hrs. en el punto A siguiendo rutas rectilíneas separadas en un ángulo de 39^0. El primer auto va a una rapidez constante de 30[Km/h] y el segundo a una rapidez constante de 60[Km/h].

    (a) A que distancia se encuentran separados a las 12:10?

    (b) Con que rapidez se estan separando a las 12:10?

13. Encontrar la ecuación de la tangente a la curva dada por la ecuación $x\cos(y) = \operatorname{sen}(x + y)$, en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

14. Determinar la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ en el punto $(1, 2)$. Hallar los puntos (si existen) donde la recta tangente es paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$.

15. En un triángulo isosceles, cuyos lados iguales miden 10cm, el ángulo opuesto a la base crece a razón de 0.5 radian por minuto.

    (a) Hallar la razón de cambio de la base del triángulo cuando el ángulo del vértice opuesto es 60^0.

    (b) Hallar la razón de crecimiento del área del triángulo cuando el ángulo del vértice opuesto es de 60^0

16. Un puente cruza un rio a 60 mts. de altura. Un automovil que se desplaza a 40[mt/s] pasa directamente sobre un bote que navega rio arriba a 15[mt/s] en el tiempo t_0. Hallar la razón de crecimiento de la distancia entre ambos, 3 segundos más tarde.

17. Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de área superficial máxima, que puede ser inscrito en una esfera de radio 8

18. Hallar la distancia mínima entre la recta $x - y = 2$ y la parabola $y = x^2$

19. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,4) y que forma, con el primer cuadrante un tríangulo de área mínima.

20. Graficar las curvas:

    (a) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

    (b) $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

    (c) $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$

21. Dada la curva:

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x &= 3\cos t \\ y &= 3\,\mathrm{sen}\, t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$, en un punto del primer cuadrante que determina con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

22. De una lámina circular de radio $R = 10$ se desea cortar un sector circular para confeccionar un cono. Calcular para cual valor del ángulo de centro θ de dicho sector, la capacidad del cono será máxima.

23. Considerar la función f definida en $(-1, 1)$. Si existe función inversa en un intervalo abierto que contiene $\sqrt{3}$, calcular $(f^{-1})'(\sqrt{3})$

24. Dada la hipocicloide

$$\begin{aligned} x &= 2\cos^3(t) \\ y &= 2\,\mathrm{sen}^3(t) \end{aligned}$$

Probar que la porción de la tangente, en cualquier punto donde esta exista, comprendida entre los ejes coordenados es constante igual a 2.

25. Considerar la curva cuya ecuación paramétrica esta dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{1+t^2} \\ y(t) &= 2t^2(1-t) \end{aligned}$$

Calcular $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

26. Sea $f(x) = x^3 + x$. Calcular $(f^{-1})''(0)$, si existe.

27. Un torpedero se encuentra anclado a 9 a km. del punto más próximo de la costa. Es preciso enviar un mensajero a un campamento militar situado a 15 Km. del punto de tierra más próximo, contando a lo largo de la costa; si el mensajero puede andar a pie lo hace a 5 [Km/h] y remando a 4 [Km/h]. En qué punto de la costa debe desembarcar el mensajero para llegar al campamento en el menor tiempo posible?