Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Campus Santiago
Primer Semestre de 2003

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Razón de Cambio

1. ¿Cuánto se tardará una inversión en duplicar su valor si la tasa es 6% compuesto continuamente?

2. Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas circulares concéntricas. El radio r de la onda exterior crece al ritmo constante de 1 cm/seg. Cuando el radio es de 4 cm. ¿A que ritmo crece el área de la región perturbada?.

3. Una cámara de tv sigue desde el suelo el despegue vertical de un cohete, que se produce de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, con s en metros y t en segundos. La cámara está a 2000 mts. del lugar del despegue. Hallar la razón de cambio del ángulo de elevación de la cámara 10 seg. después del despegue.

4. Un globo comienza a ascender desde un punto A verticalmente hacia arriba y a velocidad constante de 10mts/min. A una distancia de 100 mts. del punto A y sobre la misma horizontal hay un observador B.

   (a) ¿Cómo varía la distancia s desde el globo al observador en el instante en que el globo est'a a 50 mts. de altura?.

   (b) ¿Cómo varía el ángulo de observación θ que forma la visual del observador con respecto a la horizontal, cuando el globo está a 100 mts. de altura?

5. Una piscina tiene 25 mts. de ancho, 40 mts. de largo, 3 mts. de profundidad. Si se bombea agua al interior de la piscina a razón de 10 mts^3 por minuto.¿A qué velocidad se está elevando el nivel del agua, cuando este nivel es de 4 mts?

6. Un bloque de hielo se funde de modo que su arista disminuye con regularidad 2 cm/hr.¿A qué razón disminuye su volumen cuando su arista mide 10 cm?

7. Se espera que las ventas anuales de una empresa nueva crezcan con una rapidez proporcional a la diferencia entre las ventas en el momento t y un límite superior igual a \$ 25 millones. Las ventas iniciales son \$ 0 y se espera que alcance \$ 3.5 millones al final de tres años.

   (a) Deduzca una ecuación que exprese la razón de cambio del crecimiento de las ventas de la empresa.

   (b) Determine las ventas anuales de la empresa en cualquier momento t

   (c) ¿Cuáles serán las ventas anuales al fin del octavo año?

(d) ¿Cuánto tiempo tardarán las ventas anuales en llegar a \$12.5 millones?

Problemas de Optimización.

1. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se pueda inscribir en un circulo de radio r.

2. Se desea cercar un lote rectangular que tenga 400 mt^2 de superficie, con uno de sus lados a lo largo de un rio recto. Si no se necesita cercar el lado que da al rio, ¿Que dimensiones requiere la menor cantidad de cerca?

3. Se desea construir una caja de base cuadrada, sin tapa, disponiendo de 300 cm^2. Hallar las dimensiones para que el volumen sea máximo.

4. Cortar un sector de una hoja circular de radio R. Este segmento debe ser tal que al enrollarlo se obtenga un embudo de capacidad máxima. Determinar el ángulo del corte. Resp: el ángulo central del sector es igual a $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. La resistencia de una viga de sección rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cubo de la altura. Hallar el ancho de la viga de máxima resistencia que podria ser obtenida de un tronco de madera de 16 cm de diametro. Resp: la anchura es igual a 8 cm

6. Demostrar que una tienda cónica de capacidad dada requiere una cantidad mínima de tela cuando su altura es $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio de la base.

7. Construir un trapecio isósceles, que dada el área S, tenga un perímetro mínimo; se sabe que el ángulo de la base es α. Resp: la longitud de los lados laterales es igual a $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$

8. Hallar el cilindro de volumen máximo entre todos los cilindros circulares inscritos en un cubo dado de arista a, de tal modo que sus ejes coincidan con la diagonal del cubo y las circunferencias de las bases toquen las caras del mismo. Resp: la altura del cilindro es igual a $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; el radio de la base es igual a $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$

9. Se quiere construir un canal abierto de capacidad máxima. La base y los lados del canal deben ser de 10 cm de ancho; además los costados deben estar igualmente inclinados respecto a la base. ¿Cual debe ser la anchura del canal, por arriba?. Resp: 20 cm.

10. Demostrar que de todos los triángulos isósceles inscritos en un círculo dado, el triángulo equilátero es el de perímetro máximo.

11. Demostrar que de todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo dado, el cuadrado es el de área máxima. Demostrar que el cuadrado es también el de perímetro máximo.

12. Hallar la altura del cilindro recto inscrito en una esfera de radio R que tenga la superficie lateral máxima. Resp: la altura es $R\sqrt{2}$

13. Hallar la altura de un cono recto de volumen mínimo, circunscrito a una esfera de radio R. Resp: la altura es igual a $4R$ (el volumen del cono es el doble del de la esfera).

14. Con una lata cuadrada de lado a es preciso hacer un cajón abierto por arriba que tenga el volumen máximo. Se recortan cuadrados en los ángulos de la hojalata y se dobla ésta para formar el cajón. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados? Resp: $\frac{a}{6}$

15. Hallar la altura del cilindro recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R. Resp: la altura es igual a $2R\sqrt{3}$.

16. Dada la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=9$. Determinar la distancia más corta (la más grande) del punto (4,5) a la circunferencia.

17. De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10, determinar condiciones que deben cumplir los catetos, para que la suma de sus longitudes sea máxima.

18. Una página ha de contener 30 $(\text{pulgadas})^2$ de impresión. Los márgenes superior e inferior tienen un ancho de 2 pulgadas. Los márgenes laterales tienen 1 pulgada de ancho. Hallar las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel.

19. Se desea hacer una caja rectángular de 100 cm^3 de capacidad. El material del fondo y la tapa cuesta dos veces más caro que el de los laterales. Construya la función costo que permita calcular las dimensiones de la caja más económica.

20. Se da una función costo para cierto producto. Calcula la función costo marginal. A continuación compara el costo marginal a nivel de producción de 100 unidades con el costo de producir la unidad 101.

    (a) $C(x) = 420 + 1.5x + 0.002x^2$

    (b) $C(x) = 1200 + \dfrac{x}{10} + \dfrac{x^2}{10000}$

    (c) $C(x) = 2500 + 2\sqrt{x}$

21. Graficar las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x}$

    (b) $f(x) = \sqrt{x(x+2)} - x$

    (c) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

    (d) $f(x) = x^3 - 4x$

    (e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$