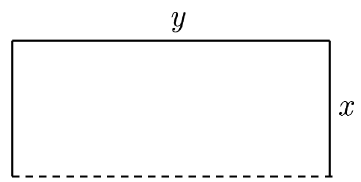
11 Problemas de Máximo y Mínimo

1. Un campo rectangular va a ser cercado a lo largo de un río, de modo que no se requiere cerca a lo largo del río.

   Si el material de la cerca cuesta \$ 2.000 por metro lineal para los dos extremos y \$ 3.000 por metro lineal para el lado paralelo al río, encuentre las dimensiones del campo de mayor área posible que puede ser cercado con un costo de \$ 900.000 para la cerca.

   Solución:

   $A = xy \qquad 900.000 = (2x)2000 + 3000y$

   Luego $y = \frac{1}{3}(900 - 4x) \qquad A(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 300x$

   $A'(x) = -\frac{8}{3}x + 300 \qquad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{225}{2}$

   $A''(x) = -\frac{8}{3} < 0$. Por lo tanto A tiene un máximo en x_0. $y_0 = 150$.

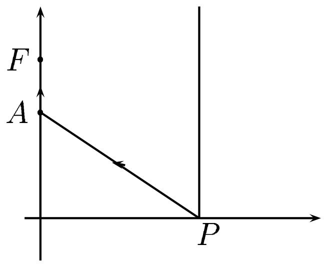
   En consecuencia las dimensiones del campo cercado son 150 [m] de largo por $\frac{225}{2}$ [m] de ancho.

2. En la ribera de un río de 3 [km] de ancho hay una planta eléctrica; en la otra ribera, 4 [km] corriente arriba hay una fábrica.

   El costo de tender un cable por tierra (línea aérea) es de 30 dólares por [km] y de 50 dólares por [km], si se tiende bajo el agua (cable submarino).

   ¿ Cuál es la ruta más económica para tender el cable desde la planta eléctrica a la fábrica, y cuál es su costo?

Solución:



$$
\begin{array}{rcl}
F & = & (0,4) \\
P & = & (3,0) \\
A & = & (0,y)
\end{array}
$$

Si $C = C(y)$ es el costo, entonces:

$$
\begin{array}{rcll}
C(y) & = & 50\sqrt{9+y^2} + 30(4-y); & 0 \leq y \leq 4 \\
C'(y) & = & -30 + \dfrac{50y}{\sqrt{9+y^2}}; & 0 < y < 4
\end{array}
$$

$$
C'(y) \;=\; 0 \Leftrightarrow 30\sqrt{9+y^2} = 50y
$$

De donde: $\quad y = \dfrac{9}{4}$

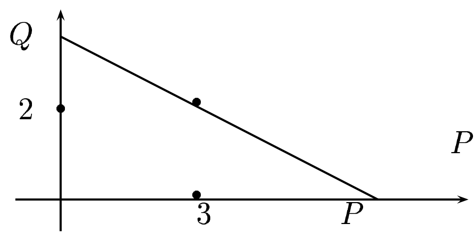
$$
C''(y) = \frac{50\sqrt{9+y^2} - 50y^2(9+y^2)^{-1/2}}{9+y^2} > 0 \quad \forall y,\, 0 < y < 4
$$

En consecuencia C tiene un mínimo en $\quad y = \dfrac{9}{4} \quad C\left(\dfrac{9}{4}\right) = 240.$

Por lo tanto el cable debe ser tendido de modo que aparezca en la ribera opuesta a la planta y a $4 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{7}{4}$ [km] de la fábrica. El costo del tendido del cable es de 240 dólares.

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 2)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.

   Solución:



$P = (a, 0)$, $Q = (0, b)$

La ecuación de ℓ es $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Como $(3, 2) \in \ell$ entonces: $\dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} = 1$, luego $\quad ab = 3b + 2a$ de donde $b = \dfrac{2a}{a-3}$.

Si S es el área del triángulo entonces

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} a \frac{2a}{a-3} = \frac{a^2}{a-3} \\ S'(a) &= \frac{2a(a-3) - a^2}{(a-3)^2} = \frac{a^2 - 6a}{(a-3)^2} \end{aligned}$$

$S(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 6$, pues $a \neq 0$

Si $a > 6 \quad \Rightarrow S'(a) > 0$

Si $a < 6 \Rightarrow S'(a) < 0$

Como además S es continua en $a = 6$, entonces S tiene un mínimo en $a = 6$. En consecuencia $b = 4$ y la ecuación de ℓ es $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = 1$.

4. Descomponga 120 en dos partes de modo que el producto P de una parte por el cuadrado de la otra parte sea máximo.

   Calcule el valor máximo de P.

Solución: Sean $x, 120 - x$ las partes.

Luego $P(x) = x^2(120 - x);\ 0 \leq x \leq 120$

$$\begin{array}{rcll} P'(x) & = & 240x - 3x^2; & 0 < x < 120 \\ P'(x) & = & 0 \quad \Leftrightarrow & x = 80 \\ P''(x) & = & 240 - 6x, \quad \text{luego} & P''(80) < 0 \end{array}$$

En consecuencia P tiene un máximo en $x = 80$.

Por lo tanto las partes son 40 y 80

$P(80) = 256.000$.

Observación: La función $P(x) = x(120 - x)^2;\ 0 \leq x \leq 120$ también permite resolver el problema pero requiere de un trabajo algebraico mayor.

5. Calcular la altura de un cilindro recto y circular de volumen V máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

   Calcule el volumen del cilindro.

   Solución: $V = \pi r^2 h \qquad R^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2$.

   Luego $V(h) = \pi h\left(R^2 - \frac{1}{4}h^2\right);\quad 0 \leq h \leq 2R$.

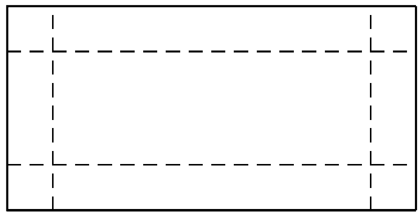
$$\begin{array}{rcll} V'(h) & = & \pi R^2 - \dfrac{3\pi}{4}h^2; \quad 0 < h < 2R & \\ V'(h) & = & 0 \quad \Leftrightarrow \qquad h = \dfrac{2}{\sqrt{3}}R & \\ V''(h) & < & 0 \quad \forall h > 0 & \text{luego } V \text{ tiene un máximo en } h = \dfrac{2}{\sqrt{3}}R. \end{array}$$

   Además $V(h) = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$.

   Observación: El cuociente entre el volumen de la esfera y el del cilindro es $\sqrt{3}$.

6. Calcular las dimensiones de una gran caja, sin tapa, de volumen V máximo que puede fabricarse de una pieza rectangular de 10 por 16 [m], cortando cuadrados iguales en sus esquinas.

Solución



Si x es el lado del corte entonces el volumen de la caja es

$$V(x) = x(16-2x)(10-2x); \quad 0 \leq x \leq 5.$$

$$\begin{aligned} V(x) &= 4x^3 - 52x^2 + 160x \\ V'(x) &= 12x^2 - 104x + 160;\ 0 < x < 5 \\ V'(x) &= 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 26x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

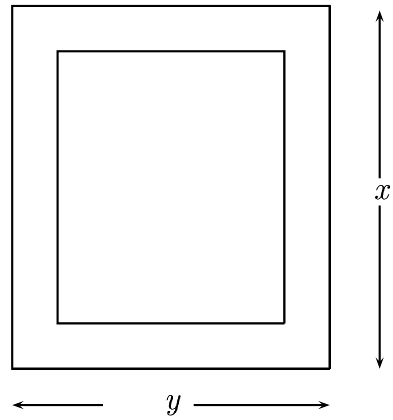
Como $V''(x) = 24x - 104, \quad V''(2) < 0$ entonces V tiene un máximo en $x = 2$.

Por lo tanto las dimensiones de la caja son 2 [m] de alto, 12 [m] de largo y 6 [m] de ancho.

7. Los márgenes superior e inferior de una página son 1.5 [cm] y los márgenes laterales son de 1.0 [cm].

   Si el área A de la superficie impresa debe ser de 476 [cm^2], ¿ cuáles deben ser las dimensiones de la página de menor área?

Solución:



Si S es el área de la página entonces $S = xy$, luego

$$A = (x-3)(y-2) = 476$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= x\left[\frac{476}{x-3} + 2\right] = 2x + A\frac{x}{x-3} \\
S'(x) &= 2 + \frac{A(x-3) - Ax}{(x-3)^2} = \frac{2(x-3)^2 - 3A}{(x-3)^2} \\
S'(x) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \approx 29.7 \\
S''(x) &= \left(2 - \frac{3A}{(x-3)^2}\right)' = 6A(x-3)^{-3}
\end{aligned}$$

Luego $S''(x_0) > 0$. Por lo tanto S tiene un mínimo en x_0.

$$y_0 = 2 + \frac{A}{x_0 - 3} \approx 19.8$$

Las dimensiones son: ancho = 19.8 [cm]
alto = 29.7 [cm]

M. Cañas C.
Marzo 2003