15 Formas Indeterminadas. Reglas de L'Hôpital

Calcular, si existen, los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^p - a^p}{x^q - a^q}$, $a \neq 0$.

   Respuesta: el límite es de la forma cero partido por cero. Examinamos entonces

   $$\lim_{x\to a} \frac{\frac{d}{dx}(x^p - a^p)}{\frac{d}{dx}(x^q - a^q)} = \lim_{x\to a} \frac{px^{p-1}}{qx^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot a^{p-q}$$

   Por lo tanto $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \dfrac{p}{q} \cdot a^{p-q}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2 \operatorname{sen} x}$.

   Respuesta: el límite es de la forma cero partido por cero. Examinemos entonces el límite del cuociente de las derivadas:

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \cos x + x\operatorname{sen} x}{2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\operatorname{sen} x}{2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x + x\cos x}, \end{aligned}$$

   límite que es de la misma forma que el original. Volvemos entonces a considerar el límite del cuociente de las derivadas:

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{3\cos x - x\operatorname{sen} x} = 1/3.$$

   Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (1 - \tan x)\sec(2x)$.

   Respuesta: el límite propuesto se puede escribir en la forma: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan x}{\cos(2x)}$ que es de la forma cero partido por cero. Considerar entonces:

   $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sec^2 x}{-2\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2\operatorname{sen} 2x} = \frac{2}{2} = 1$$

   Por lo tanto $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (1 - \tan x)\sec(2x) = 1$.

4. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{cotan} x\right)$.

Respuesta: este límite es de la forma infinito menos infinito y se puede escribir como $\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x\operatorname{sen} x}$ que es de la forma cero partido por cero. Consideremos entonces el límite del cuociente de las derivadas:

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-\cos x + x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}$ que es de la misma forma que el anterior. Consideremos entonces:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = 0$$

Por lo tanto $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{cotan} x\right) = 0$

5. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

Respuesta: Al examinar este límite vemos que **no** es posible decidir su forma; de allí que **no se pueda aplicar ninguno de los Teoremas de L'Hôpital**.

Al amplificar por $\frac{1}{x}$, queda: $\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$.

Como $0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$. Si $x \to +\infty$ entonces por el **Teorema de Acotamiento** y considerando que $\lim_{x\to +\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$ entonces $\lim_{x\to +\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 0$ y en consecuencia $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x} = 1$.

Observación: si se hubiese aplicado (erróneamente) el Teorema de L'Hôpital tendríamos: $\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ y al volver aplicarlo (de nuevo erróneamente) queda: $\lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen} x} = -1$.

Consecuencia: este ejercicio muestra la necesidad de **clasificar** el límite **antes de aplicar** algún teorema sobre cálculo de límites.

6. Sea $y = f(x)$ una función que satisface las propiedades siguientes:

   i) Si $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

   ii) $f'(x) = x^{-1}$

   iii) Si $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$.

   Calcule: $\lim\limits_{x\to 0^+} (-x\ f(x))$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

   Respuesta: $\lim\limits_{x\to 0^+} (-xf(x)) = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x}}$ que es de la forma infinito partido por infinito.

   Consideremos entonces: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

   Luego $\lim\limits_{x\to 0^+} (-xf(x)) = 0$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$ es de la forma infinito partido por infinito. Consideramos entonces: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = 2\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Luego $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

7. Calcular (si existe) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

   Respuesta: **No** es posible decidir la forma de este límite. Amplificando por $\dfrac{1}{x}$ queda: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}$. Por Teorema de Acotamiento se sabe que:

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}, \quad 0 \le \left|\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right| \le \left|\frac{\pi}{2x}\right|$$

   Si $x \to +\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right|$

   Por lo tanto $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x}{x - \operatorname{sen} x} = 1$.

8. Calcular (si existe): $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{1-\cos x}$.

Respuesta: es de la forma cero partido por cero y se puede escribir: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{(1+x^2)(1-\cos x)}$.

Consideremos el cuociente de las derivadas: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{2x(1-\cos x)+(1+x^2)\operatorname{sen} x}$ que es de la misma forma. Volviendo a aplicar L'Hôpital queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{2(1-\cos x)+2x\operatorname{sen} x+2x\operatorname{sen} x+(1+x^2)\cos x} = 2$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{1-\cos x} = 2$

Nota: compare los ejercicios 7 y 8.

9. ¿ Para qué valor de las constantes **a** y **b** se cumple que: $\lim\limits_{x\to 0} (x^{-3}\operatorname{sen} 3x + ax^{-2} + b) = 0$?.

Respuesta: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x + ax + bx^3}{x^3}$ que es de la forma cero partido por cero; consideremos entonces: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\cos 3x + a + 2bx^2}{3x^2}$. Con el objeto de que este límite exista y sea cero, es necesario que $a+3=0$, o sea: $a=-3$. Por lo tanto sigue siendo de la misma forma. Consideremos entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-9\operatorname{sen} 3x + 6bx}{6x}$ que es de la misma forma.

Consideremos: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-27\cos 3x + 6b}{6}$.

Si este límite es cero, entonces: $-27+6b=0$ y luego $b=9/2$.

10. Sea $f(x) = e^x$ y suponga de $f'(x) = e^x$.

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x - x}$

Respuesta: Es de la forma cero partido por cero.

Calculamos entonces: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\cos x - 1}$ que es de igual forma. Calculamos entonces:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} x e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{-\operatorname{sen} x}$ que de nuevo es de igual forma:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\cos x e^{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \cos x e^{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} 2x e^{\operatorname{sen} x} + \cos^3 x e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{-\cos x} = 1$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x - x} = 1$

M. Cañas C.
Junio 2003.