



Prueba Práctica 2 miércoles

Nombre:

Instrucciones. Lea atentamente las preguntas y responda cada una de ellas en el archivo Excel entregado en su sección correspondiente (ver Excel). Además, las preguntas que requieran de un procedimiento matemático deben entregarse en una hoja con el procedimiento escrito para llegar a la respuesta (Pregunta 1.b y 2.a).

Pregunta 1.

Sea $f(x): [2.5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 - 10x - 5$ y dadas las ecuaciones de punto fijo, obtenidas a partir de la ecuación $f(x) = 0$:

1. $x = \sqrt[3]{10x + 5}$

2. $x = \frac{10x+5}{x^2}$

a) Grafique la función $f(x)$ entre $[-5.5]$ con un incremento de 0.1 entre cada x . Utilice Visual Basic para crear la tabla y Excel para graficarla. (1 punto)

b) Comprueba la convergencia de ambas ecuaciones de punto fijo. (2 puntos)

Respuesta:

Convergencia de $g(x) = \sqrt[3]{10x + 5}$

1) $\max_{[2.5; 5]} |g'(x)| < 1$

$$g'(x) = \frac{10}{2(10x + 5)^{2/3}} \quad \text{0.25ptos}$$

$|g'(x)|$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[2.5; 5]$, luego:

$$\max_{[2.5; 5]} |g'(x)| = |g'(2.5)| = 0,345 < 1 \quad \text{0.25ptos}$$

Por lo tanto $g(x)$ cumple con el primer criterio de convergencia.

2) para todo x que pertenece a $[2.5; 5]$ entonces $g(x)$ pertenece a $[2.5; 5]$. Como x es estrictamente decreciente en el intervalo evaluamos los extremos del intervalo. Entonces:

$$g(2.5) = 3,107$$

$$g(5) = 3,803$$

$$[3,107; 3,803] \subset [2.5; 5] \quad \text{0.25ptos}$$

Por lo tanto, la ecuación de punto fijo Converge. **0.25ptos**

Convergencia de $g(x) = \frac{10x+5}{x^2}$

1) $\max_{[2,5; 5]} |g'(x)| < 1$

$$g'(x) = \frac{-10(x+1)}{x^3} \quad 0.25ptos$$

$|g'(x)|$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[2,5; 5]$, luego:

$$\max_{[2,5; 5]} |g'(x)| = |g'(2.5)| = 2.24 > 1 \quad 0.25ptos$$

Por lo tanto $g(x)$ no cumple con el primer criterio de convergencia.

2) para todo x que pertenece a $[2,5; 5]$ entonces $g(x)$ pertenece a $[2,5; 5]$. Como x es estrictamente creciente en el intervalo evaluamos los extremos del intervalo. Entonces:

$$g(2,5) = 4,8$$

$$g(5) = 2,2$$

$$[2,2; 4,8] \not\subset [2,5; 5] \quad 0.25ptos$$

Por lo tanto, la ecuación de punto fijo no Converge. **0.25ptos**

c) De acuerdo a sus resultados en la pregunta anterior calcule la raíz de $f(x)$ utilizando el método de punto fijo programado en Visual Basic, con un error menor a 10^{-3} . (3 puntos)

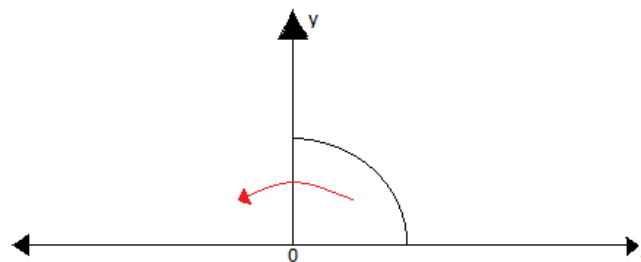
d) Muestre en la planilla de Excel una tabla en la que se muestren todas las estimaciones hechas hasta encontrar la raíz. (4 puntos)

Pregunta 2.

La empresa constructora “EcoDomos” quiere postular su proyecto de casa ecológicas para un fondo participativo del Ministerio del Medio Ambiente. Los domos consisten en una semiesfera de radio r_1 con un agujero en su parte superior de radio r_2 . Se estima que el costo de construcción de estos domos es de \$100.000 por m^2 (del área exterior del domo).

Consideraciones:

1. Una semiesfera se puede formar al rotar un cuarto de circunferencia alrededor del eje y . (ver figura)



2. El área de una superficie de revolución generada al rotar una función $y = f(x)$ definida en el rango $[x_1, x_2]$ alrededor del eje y está dada por la ecuación.

$$A = 2\pi \int_{x1}^{x2} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

3. La ecuación de una circunferencia radio r es: $x^2 + y^2 = r$

Responda:

- a) Calcule analíticamente el área externa del domo si la semiesfera que lo compone tiene un radio de 10 m² y el agujero de su parte superior tiene un radio de 1 m². (3 puntos)

Respuesta: Sea $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ **1pto** entonces el área es:

1pto (por definir bien la integral)

$$b) A = 2\pi \int_1^{10} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$$

$$A = 2\pi \int_1^{10} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$A = 2\pi \int_1^{10} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$A = 2\pi \int_1^{10} \sqrt{\frac{(r^2 - x^2)r^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$A = 2\pi \int_1^{10} \sqrt{r^2} dx$$

$$A = 2\pi r x \Big|_1^{10}$$

$$A = 2\pi r(10 - 1); \text{ si } r = 10$$

$$A = 180\pi \text{ **1pto**}$$

- c) Estime el área externa del domo con las mismas dimensiones de la pregunta anterior. Para esto utilice alguno de los métodos de integración vistos en clases con n=1000. (4 puntos)
- d) Calcule el coste del domo de acuerdo a su resultado en la pregunta 2) (3 puntos)

Prueba Práctica 2 jueves

Nombre:

Instrucciones. Lea atentamente las preguntas y responda cada una de ellas en el archivo Excel entregado en su sección correspondiente (ver Excel). Además, las preguntas que requieran de un procedimiento matemático deben entregarse en una hoja con el procedimiento escrito para llegar a la respuesta (Pregunta 1.b y 2.c).

Pregunta 1.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 + 5x - 5$. Responda las siguientes preguntas

- a) Grafique la función $f(x)$ entre $[-5.5]$ con un incremento de 0.1 entre cada x . Utilice Visual Basic para crear la tabla y Excel para graficarla. Además, encuentre un intervalo

$[a,b]$ de rango 1 que contenga la raíz de $f(x)$ (1 punto). *Hint: intervalo $[a,b]$ tiene rango $(b-a)$*

b) A partir de la ecuación $f(x) = 0$, cree una ecuación de punto fijo $x = g(x)$ y analice la convergencia de $g(x)$ en el intervalo propuesto en la pregunta a). (2 puntos)

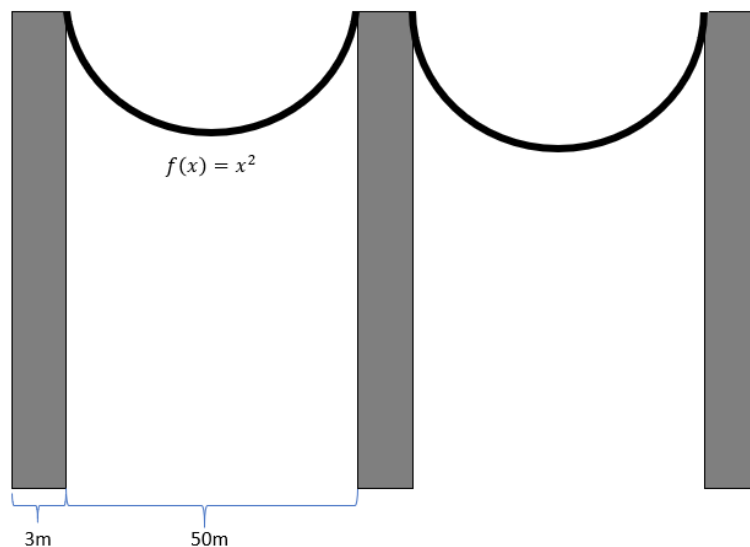
Respuesta: El resultado depende de la $g(x)$ definida. El esquema de puntajes es el mismo que la pregunta 1.b del miércoles, pero como solo se comprueba una función es 0.5 en vez de 0.25

c) Calcule la raíz de $f(x)$ utilizando alguno de los métodos vistos en clases. Utilice un error de 10^{-3} y el intervalo propuesto en la pregunta a) (3 puntos)

d) Muestre en la planilla de Excel una tabla en la que se muestren todas las estimaciones hechas hasta encontrar la raíz. (4 puntos)

Pregunta 2.

Se planea construir un puente que conecte dos localidades A y B que están separadas 10 km. El puente que se planea construir tiene pilares separados cada 50m. Dichos pilares se encuentran unidos por cables, que al unir ambos pilares toman la forma de una función $f(x) = x^2$ (ver figura).



Consideraciones:

- La longitud del arco de una función $f(x)$ se puede calcular mediante la siguiente ecuación.

$$A = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Responda:

- e) Estime el largo que debe tener el cable para conectar dos pilares. Utilice los métodos de integración vistos en clases con $n=10.000$ para resolver el problema. (3 pts)
- f) ¿A cuantos metros del primer pilar, se han gastado 1000 metros de cable? Estime utilizando los métodos de integración vistos en clases con $n=10.000$ (4 puntos)
- g) Si la empresa cuenta con 250.000m de cable para la construcción del puente. ¿Podrán finalizar el puente? Si su respuesta anterior fue sí, estime cuanto sobró de cable si es que sobro algo. Si su respuesta fue no, estime cuantos metros faltaron para poder completar el puente. (3 puntos)
- Hint: considere el largo del puente desde el extremo izquierdo de la primera viga hasta el extremo derecho de la última viga.*

Respuesta 2.c

$L = 10000$ [m] (Largo del puente)

$L_c = 1252,55$ (Largo de la sección de cable entre 2 pilares, obtenido en 2.a)

$x = ?$ [m] (Cable necesario para completar el puente)

Entonces:

$$L = 3 + (50 + 3) * \frac{x}{L_c}$$

$$10000 = 3 + (50 + 3) * \frac{x}{L_c}$$

$$x = \frac{(10000 - 3)L_c}{53}$$

$$x = 236.259,289 \text{ [m]}$$

Por lo tanto, el puente si se puede construir y sobran 3740,71 metros de cable.

Puntaje:

2 pts por procedimiento matemático correcto

1 pto por resultado y respuesta correcta