Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Agronómicas
Ingeniería en Recursos Naturales Renovables
Cálculo Y Geometría Analítica

Profesor: Jorge Alfaro
Ayudantes: Valentina Aliste
Alexis Medina
Eduardo Pichuante

Ayudantía Sistema de Ecuaciones
Métodos Cramer y Cofactores

Axioma principal para que un sistema de ecuaciones sea "resolvible" por estos métodos, es que sea **Lineal** y **Determinado**:

Lineal: Todas las incógnitas son de primer grado.
Determinado: n° de ecuaciones igual al n° de incógnitas.

Método Cramer:

Basado en el cuociente de las determinantes asociadas al sistema matricial.

Ej:
$$\begin{cases} ax+by+cz=j \\ dx+ey+fz=k \\ gx+hy+iz=l \end{cases}$$

Se necesita expresar este sistema de ecuaciones (en este caso de 3 incógnitas) en forma matricial de la siguiente manera: $A\vec{v}=\vec{r}$

Donde:
$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & h & g \end{pmatrix};\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\vec{r}=\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

Queda:
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & h & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

Expresamos la matriz extendida:
$$E=\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \end{array}\right)$$

Ahora definiremos nuevas matrices, en las que haremos unas permutaciones de las columnas de la matriz extendida, de la siguiente forma:
$$E_x=\begin{pmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{pmatrix};E_y=\begin{pmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{pmatrix};E_z=\begin{pmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{pmatrix}$$

Con lo que finalmente definimos nuestras soluciones como:
$$x=\frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}};y=\frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}};z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

El sistema de ecuaciones se resume a calcular las determinantes de las matrices arriba expuestas, para realizar ese cálculo se procede de la siguiente manera:

Se debe tomar los elementos de la primera fila de la matriz objetivo, y multiplicar, uno por uno, a la determinante que resulta de eliminar la fila y la columna en la que se encuentra el elemento por el que se está multiplicando, el cual debe mantener el signo en su parte superior, finalmente se procede a sumar, como se define a continuación:

$$det(A) \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \rightarrow (+)a \begin{vmatrix} (+) & (-) \\ e & f \\ h & i \end{vmatrix} \rightarrow a(ei-hf) \\ \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \rightarrow (-)b \begin{vmatrix} (+) & (-) \\ d & f \\ g & i \end{vmatrix} \rightarrow -b(di-gf) \\ \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \rightarrow (+)c \begin{vmatrix} (+) & (-) \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} \rightarrow c(dh-ge) \end{cases}$$

$$det(A) = a(ei-hf) - b(di-gf) + c(dh-ge)$$

Método de los Cofactores (escalonamiento)

El método se basa, en anular los elementos que están bajo la diagonal de la matriz extendida (triangular inferior), esto se realiza mediante la multiplicación de una fila, en la que se encuentra el pivote que es un elemento de la diagonal, por cofactores y sumándolas a la fila en la que se encuentra el elemento que se pretende anular, se explica mediante un ejemplo:

Ej:

Sea el sistema de ecuaciones definido a continuación, con su correspondiente expresión matricial y matriz extendida:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 12 \\ 2x - y + 5z = 18 \\ -x + 3y - 3z = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 18 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{array}\right)$$

Se pretende anular los números por debajo de la línea verde, para esto se usará los elementos de la diagonal. Es importante aclarar, que las filas en un sistema de ecuaciones se pueden mover a voluntad, en este caso no se movieron debido a que lo ideal, es que el elemento que quede en la primera posición de la diagonal sea 1, para simplificar el cálculo de los cofactores.

Profesor: Jorge Alfaro
Ayudantes: Valentina Aliste
Alexis Medina
Eduardo Pichuante

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 18 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

- En el primer caso, se debe eliminar el 2 (marcado en amarillo), para eso se debe multiplicar el pivote de valor 1, por algún valor que sumado al 2, de resultado 0, es trivial reconocer el valor -2.
  El procedimiento es multiplicar toda la fila superior, por el cofactor -2, para luego sumarla a la fila del medio, la matriz resultante es la segunda.
- En el segundo caso, se debe anular el -1, se procede nuevamente a buscar un valor, que multiplicado por 1 y sumado a -1 de 0, el resultado es 1. Por ende se multiplica toda la primera fila por el cofactor 1, y se suma a la tercera fila, la matriz resultante es la tercera.

Es importante aclarar, que siempre el valor que se usará para multiplicar o pivote, debe ser el elemento perteneciente a la diagonal y que se encuentra en la misma columna de los valores a eliminar.

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) \end{cases}$$

Para el final, se muestra dos caminos a seguir…

- En el primer caso se mantiene la matriz resultante del procedimiento anterior, usando como pivote al valor 3, se deduce que el cofactor será -1/3. Se multiplica la segunda fila por el cofactor y se suma a la tercera, el resultado segunda matriz de arriba.
- En el segundo caso, se permutaron las filas 2 y 3, para usar como pivote el valor 1, que entrega un cofactor -3 (relativamente más fácil para multiplicar y sumar que un racional como -1/3), se multiplica a la segunda fila y se suma a la tercera. El resultado es la segunda matriz de abajo.

Finalmente se concluye que con ambos caminos se llega al mismo resultado. Se debe "desextender" la matriz y volver al sistema de ecuaciones, con la matriz encontrada ahora, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 12 \\ 3y - 3z = -6 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 12 \\ y + z = 4 \\ -6z = -18 \end{cases}$$

De ambos se desprende que el resultado es: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$